

IMPACTO DE LA INCLUSIÓN DE EDADES EXTREMAS EN TARIFICACIÓN

IMPACT OF THE INCLUSION OF EXTREME AGES IN PRICING

Òscar Cases Figuerola^{1*} y Miguel Santolino²

¹*Máster de Ciencias Actuariales y Financieras. Universidad de Barcelona. España.*

²*RISKcenter-IREA. Universidad de Barcelona. España.*

Fecha de recepción: 04/07/2022

Fecha de aceptación: 16/12/2022

Resumen

El presente estudio consiste en la elaboración de tablas mortalidad para España que incluyan el riesgo de mortalidad para edades hasta los 125 años. Se elaboran tablas de mortalidad a partir de datos observados para individuos de los 0 a los 100 años y datos estimados a partir de un modelo de supervivencia de los 101 a los 125 años durante el período entre 1975 y 2018. Posteriormente, se realizan proyecciones futuras de mortalidad a partir de las tablas generadas. Se concluye con una comparación que permite observar si existen diferencias significativas en tarificación utilizando dichas proyecciones en lugar de proyecciones de mortalidad hasta los 100 años, como frecuentemente se realiza en la práctica.

Palabras clave: Gompertz, Lee-Carter, proyecciones, tablas de mortalidad, longevidad, primas puras.

Abstract

The present study focuses on the elaboration of mortality tables for Spain that include mortality risk for ages up to 125 years. Mortality tables include observed mortality data for 0-100 ages and estimated mortality data for 101-125 ages covering the interval period between 1975 and 2018. Subsequently,

* Autor para correspondencia: oscarscasesfiguerola27@gmail.com

future mortality projections are made based on generated mortality tables. We conclude with a comparison to evaluate differences in pricing using these mortality projections and mortality projections based on mortality tables up to 100 years, as it is often made in practice.

Keywords: Gompertz, Lee-Carter, projections, mortality tables, longevity, pure premiums.

1. Introducción

El aumento de la esperanza de vida de los individuos a lo largo de las últimas décadas se considera uno de los rasgos demográficos propios de las economías desarrolladas. Dicho progreso suele atribuirse a un buen sistema sanitario y una calidad de vida creciente (Cebrino, 2012). Los incrementos en la esperanza de vida suscitan enorme interés en la sociedad y suelen ser divulgados por los medios de comunicación.

No obstante, para el actuario, además de un rasgo positivo del conjunto de la sociedad, también supone un reto la necesidad de modelizar adecuadamente el riesgo de supervivencia o fallecimiento futuro. Cabe añadir que no existen indicios de que esta tendencia se aminore en los próximos años, o de que la esperanza de vida humana esté llegando a su límite máximo (Goerlich y Pinilla, 2006). Nótese cómo en el siglo XX se ha extendido el uso de la denominación de *la cuarta edad* para referenciar las cohortes de población mayores de 80 años. Desde esa perspectiva, debe entenderse que las probabilidades de mortalidad no son estáticas, sino que varían con el tiempo.

Con el objetivo realizar proyecciones de mortalidad futura, Lee y Carter (1992) propusieron un modelo para analizar la evolución demográfica de Estados Unidos que ha sido ampliamente utilizado (Macias y Santolino, 2018; Moyano *et al.*, 2020). Numerosos modelos estocásticos de mortalidad se basan en el modelo Lee-Carter como el propuesto por Renshaw y Haberman (2006) que extendieron la modelización para incluir los efectos específicos de cada cohorte. Muchos de estos modelos pueden englobarse en la familia de modelos de mortalidad estocástica edad-periodo-cohorte generalizados definidos en Villegas *et al.* (2017).

Estos modelos se calibran en base a datos históricos. En los registros de fallecimientos la fiabilidad de los datos para edades muy avanzadas es deficiente por el reducido número de casos registrados, aspecto que ya fue constatado por Lee y Carter (1992). Como señalan los autores, una práctica

habitual entre los especialistas consiste en eliminar los últimos años y ajustar el modelo para el rango de edades con datos fiables, frecuentemente entre los 0 y 100 años. No obstante, esta metodología no permite realizar predicciones de la evolución de la mortalidad para edades por encima de los 100 años.

Ahora bien, cada vez un mayor porcentaje de la población alcanza los 100 años y, si la evolución de la mortalidad continua como en los últimos 50 años, todo apunta a que en el futuro habrá una proporción importante de la población que alcanzará los 110 y los 120 años. El propósito de este artículo es analizar el impacto que puede tener en el cálculo de las primas y de las correspondientes provisiones considerar proyecciones de mortalidad hasta los 125 años. Por tanto, este trabajo tiene una importante aplicación práctica dentro del ejercicio profesional de las compañías aseguradoras especializadas en el ramo de vida.

Para las predicciones de mortalidad para el rango de edades entre los 0 y 125 años, el presente estudio emplea datos de la *Human Mortality Database*¹ (HMD) que comprenden el lapso temporal de 1978 a 2018. En estas tablas de mortalidad se define el infinito actuarial a los 110 años con mucha variabilidad en los valores observados en las edades avanzadas. Nuestra propuesta consiste en emplear los datos observados de mortalidad entre los 0 y 100 años para cada uno de los años de calendario y, aplicar un modelo paramétrico de mortalidad de Gompertz para cada año del calendario con el fin de estimar la mortalidad asociada al intervalo de edad entre los 100 y 125 años. De esta forma, se confeccionarán tablas de mortalidad para los años entre 1978 y 2018 que cubrirán las edades comprendidas entre los 0 y los 125 años. Alternativamente, otros modelos paramétricos podrían ser utilizados para estimar la mortalidad entre los 101 y 125. Una recolección de estos modelos puede consultarse en Pascariu (2018).

Con las tablas de mortalidad de pseudo observaciones con las probabilidades de fallecimiento para las edades entre 0 y 125 años se ajustará el modelo estocástico de mortalidad Lee-Carter (1992) para realizar proyecciones de mortalidad. Se mostrarán las diferencias estimadas en la esperanza de vida al nacer por género que implica considerar el infinito actuarial en los 100 años o el infinito actuarial en los 125 años. Por último, se ilustrará el impacto en el cálculo de primas para distintos productos del ramo de vida de considerar ambos escenarios.

¹ www.mortality.org

Este estudio pretende incidir en la discusión sobre si es necesario ampliar el rango de edades que constan en las tablas de mortalidad hasta los 125 años, especialmente cuando el propósito es realizar proyecciones de mortalidad de las cohortes futuras, habida cuenta de que cada vez más personas vivirán hasta edades avanzadas.

El artículo se estructura de la siguiente forma: en el apartado 2 se introduce la notación actuarial. El 3 desarrolla la construcción de las probabilidades de mortalidad y supervivencia con datos observados y estimados. En el 4 se muestra cómo proyectar la supervivencia con las tablas de mortalidad confeccionadas anteriormente. El apartado 5 se analiza el impacto en el cómputo de la esperanza de vida en función de si este se realiza la estimación sólo con datos hasta los 100 años o hasta los 125 años. Por último, en el 6 se calculan las primas de diversas rentas actuariales según los dos posibles escenarios de infinito actuarial.

2. Notación actuarial

Antes de proceder al propio desarrollo de la investigación, se introduce la notación utilizada en el estudio siguiendo a Ayuso *et al.* (2007):

$T(x)$ es la función de vida residual a la edad x , es decir, la diferencia entre la variable aleatoria 'edad de fallecimiento' X y la edad actual del individuo x , $T(x) = X - x$.

L_x es la función censal de supervivencia, que indica la relación entre los supervivientes a una edad determinada x y aquellos que fallecerán durante el transcurso del año en cuestión.

m_x se refiere al tanto central de mortalidad. Se calcula como el número de fallecidos entre x y $x+1$ dividido por la función censal a la edad x .

${}_tq_x$ es la probabilidad de fallecimiento entre las edades x y $x + t$ de una persona viva a la edad x .

${}_tp_x$ es la probabilidad de supervivencia a la edad $x + t$ de una persona viva a la edad x .

l_x es la función cohorte e indica la cantidad de personas que sobreviven a una edad x .

T_x es la cantidad de existencia. Indica el número de años que sobrevivirá una determinada cohorte para una edad x .

\bar{e}_x es la esperanza de vida residual y representa el valor medio de la vida restante de un individuo de edad x . Se calcula como $\bar{e}_x = E[T(x)] = \int_0^{w-x} {}_t p_x dt$, donde w es la edad límite de supervivencia (infinito actuarial).

e_x^0 es la esperanza de vida completa. Es una aproximación discreta de la esperanza de vida residual basada en la distribución uniforme de los fallecimientos a lo largo del año. En concreto, se calcula como $e_x^0 = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{w-x} {}_t p_x$.

e_x es la esperanza de vida abreviada. A diferencia del caso anterior, esta expresa la media de los años completos de supervivencia esperada para un individuo de edad x , y se calcula como $E[ENT(T_x)] = \sum_{t=1}^{w-x} l_{x+t}$ que al dividir por l_x , se obtiene $e_x = \sum_{t=1}^{w-x} {}_t p_x$.

3. Modelización de las edades extremas

3.1. Datos

De acuerdo con el objetivo principal de este trabajo, un primer paso consiste en la obtención de los datos de mortalidad de España. Por ello, se recurre a la base de datos procedente de la *Human Mortality Database* (HMD, 2021) que permite descargar todos los datos necesarios para construir las tablas de mortalidad de España. Todos los cálculos se realizan en R (R Core Team, 2022).

3.2. Construcción de las tablas de mortalidad con edades extremas

Se pretende crear unas tablas propias de mortalidad que contengan datos estimados para edades extremas (aquellas que suelen excluirse). El periodo temporal que abarca el presente trabajo comprende entre el año 1975 al 2018. El análisis se realiza considerando las probabilidades de hombres y mujeres por separado, ya que muestran diferencias en las probabilidades de muerte y supervivencia (López Ramos, 2020).

Para cada año de estudio, se selecciona el tanto central de mortalidad de los 0 a los 100 años y se utilizará directamente para confeccionar las tablas de mortalidad. La mortalidad entre los 101 y 125 años se estimará a partir de la ley de mortalidad propuesta por Benjamin Gompertz en el año 1825 (Gompertz, 1825). El modelo de Gompertz supone un comportamiento exponencial de la mortalidad con la edad. En concreto, se define como $m_x = a \cdot e^{bx}$, donde el parámetro “a” indica el nivel inicial de la mortalidad y el parámetro “b” que corresponde a la variación de la mortalidad con la edad “x”.

Para el ajuste del modelo paramétrico de supervivencia de Gompertz se excluyen las edades asociadas a la mortalidad infantil y la mortalidad ‘accidental’ (joroba de la curva). En concreto, el modelo de Gompertz se ajusta para las edades comprendidas entre los 50 y los 100 años. Esto se debe a que este modelo tiene un muy buen comportamiento para ajustarse a la mortalidad de las edades avanzadas, pero no a la mortalidad infantil y la mortalidad accidental (Gavrilov y Gavrilova, 2019). La mortalidad por causas no naturales tiene especial incidencia entre los 20 y los 40 años (joroba de la curva de mortalidad), siendo los accidentes de tráfico la primera causa de muerte entre los jóvenes (Gutierrez, 2018). Del mismo modo, la mortalidad infantil al nacer es elevada en comparación con la mortalidad de los primeros años de vida. El modelo de Gompertz no capta adecuadamente estas características de la curva de mortalidad. En cambio, tiene muy buen comportamiento para captar la mortalidad natural para edades avanzadas (Gavrilov y Gavrilova, 2019).

En la estimación del tanto central de mortalidad para las edades entre los 101 y 125 se podrían utilizar otros modelos de supervivencia. Una selección de las principales leyes de mortalidad puede encontrarse en Pascariu (2018). No obstante, Gavrilov y Gavrilova (2019) demuestran que el modelo de Gompertz es un modelo apropiado para la modelización de la mortalidad en edades extremas.

3.3. Estimación de la probabilidad de fallecimiento

Se crea una matriz donde cada columna representará un año del calendario entre 1975 y 2018 y cada fila una edad. Para el caso que nos ocupa se ha optado por trabajar con las probabilidades anuales de fallecimiento (q_x). La relación entre tanto central de mortalidad y probabilidad de fallecimiento bajo el supuesto de uniformidad en los fallecimientos es la siguiente (Ayuso *et al.*, 2007):

$$q_x = \frac{2 \cdot m_x}{2 + m_x}$$

En concreto, se construyen 4 matrices diferentes: dos para los hombres de 0 a 100 y de 0 a 125 años y otros dos que comprenden las mujeres de 0 a 100 y de 0 a 125 años. Una vez construidas las matrices, se puede ilustrar gráficamente cómo evoluciona el logaritmo de la probabilidad anual de fallecimiento a lo largo de los años analizados (1975-2018), tal y como se muestra en el Gráfico 1 y Gráfico 2.

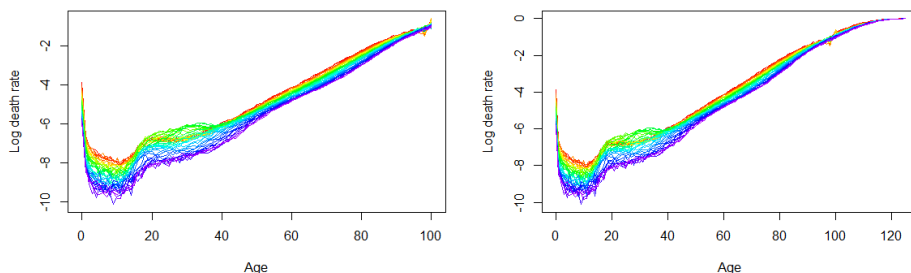


Gráfico 1. Mortalidad de los hombres para las edades entre 0 y 100 años (izquierda) y entre 0 y 125 años (derecha) en el periodo 1975-2018.

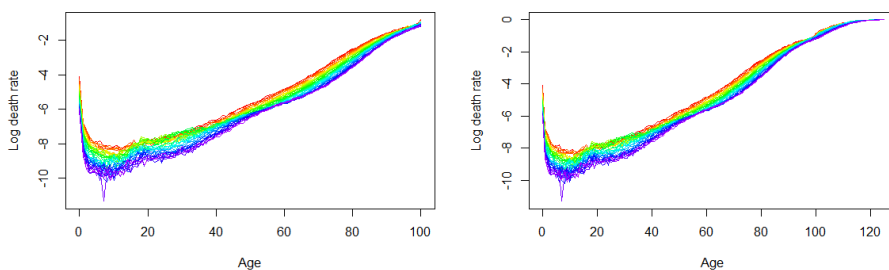


Gráfico 2. Mortalidad de las mujeres para las edades entre 0 y 100 años (izquierda) y entre 0 y 125 años (derecha) en el periodo 1975-2018.

En los gráficos aquellos años representados con una tonalidad roja, amarilla y verde, corresponden a los más antiguos del estudio, mientras que el color azul y violeta se refiere a los años más recientes. Vemos cómo, respecto a la variabilidad de la mortalidad, ésta es mayor en las edades primeras. Puede observarse una ‘joroba’ entre los 10 y los 40 años aproximadamente. Esta divergencia corresponde mayoritariamente a la mortalidad provocada por los accidentes de tráfico, la principal causa de muerte entre los adultos jóvenes. Según un informe de la Organización Mundial de la Salud los siniestros viales

son la principal causa de muerte entre sujetos de 5 a 29 años (Gutiérrez, 2018). Además, las personas entre 15 y 44 años involucradas en accidentes representan el 48% del total de accidentes mortales a nivel global. Nótese que dicha joroba es más pronunciada en los hombres, lo cual podría atribuirse a una mayor propensión de estos a conducir motocicletas en comparación a las mujeres (Segura *et al.*, 2017).

De la misma manera, resulta llamativo el comportamiento de los fallecimientos entre las edades de 20 a 40 años para los años representados en una tonalidad verde. Este lapso temporal presenta una mayor mortalidad, cuya incidencia destaca especialmente en el caso de los hombres. Dicho período corresponde a la década de 1985 a 1995 y coincide con la denominada epidemia de heroína en España. Como dicha denominación indica, durante los años ochenta y principios de los noventa, el consumo de esta droga disparó la mortalidad juvenil y primera edad adulta. Esta circunstancia contribuyó, a su vez, a una rápida expansión del VIH y creó un efecto dominó de gran impacto social. Fue tal la repercusión que la mortalidad relacionada con las drogas llegó a ser la principal causa de fallecimiento juvenil en las grandes ciudades (de la Fuente *et al.*, 2006). Respecto a las edades extremas, se puede constatar cómo evoluciona la mortalidad durante los últimos años estimados mediante el modelo Gompertz. Se observa una desaceleración a medida que nos acercamos a los 125 años.

4. Proyección de la mortalidad con edades extremas

Una vez construidas las tablas de mortalidad para el periodo entre 1975 y 2018, ajustaremos un modelo estocástico de mortalidad que nos permitirá hacer proyecciones de la mortalidad futura. Este paso es determinante, ya que una vez se proyecte la mortalidad de los distintos colectivos, estaremos en disposición de medir el impacto de la inclusión de las edades extremas en el comportamiento de la mortalidad futura.

4.1. Modelo Lee Carter

El modelo estocástico utilizado para la predicción de la mortalidad es el modelo propuesto por Lee y Carter (1992). El modelo Lee-Carter se define como:

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x \cdot k_t + \varepsilon_{x,t}$$

O, alternativamente:

$$m_{x,t} = \exp(a_x + b_x \cdot k_t + \varepsilon_{x,t})$$

$m_{x,t}$: El tanto central de mortalidad a una edad “ x ” y un año de calendario “ t ”.

a_x : constante que ilustra el nivel medio de mortalidad para cada una de las edades. Representa la tendencia central.

b_x : parámetro que indica las desviaciones de la mortalidad para cada edad respecto la tendencia central.

k_t : parámetro que indica la tendencia temporal general de la mortalidad.

$\varepsilon_{x,t}$: término de perturbación del modelo.

4.2. Estimación de los parámetros y predicción

Lee y Carter proponen estimar los parámetros a partir de la descomposición en valores propios para minimizar el error cuadrático medio, es decir:

$$\min \left\{ \sum_{x,t} (\ln(m_{x,t}) - (a_x + b_x \cdot k_t))^2 \right\}$$

Para que exista solución, es necesario establecer restricciones sobre los parámetros. Habitualmente, se establecen las siguientes dos restricciones, $\sum_x b_x = 1$ y $\sum_{t=t_1}^{t_n} k_t = 0$. Más detalles sobre la estimación de los parámetros pueden encontrarse en Macias y Santolino (2018). Este modelo también puede estimarse por máxima verosimilitud para modelos no lineales generalizados. Más detalles pueden encontrarse en Villegas *et al.* (2017).

Una vez estimados los parámetros, para realizar predicciones futuras del tanto central de mortalidad, únicamente es necesario predecir el comportamiento del parámetro dependiente del año de calendario, k_t . En concreto, se modeliza el parámetro k_t suponiendo que se comporta como un paseo aleatorio con constante (Hyndman *et al.*, 2019).

5. Impacto de las edades extremas en la esperanza de vida

Uno de los aspectos más relevantes en el campo actuarial es el concepto *esperanza de vida de un individuo*. Esta permite relacionar la edad actual del sujeto "x" con la variable aleatoria edad de fallecimiento "X". Su cálculo es importante en muchos ámbitos dentro y fuera del campo actuarial como se demuestra a continuación: por ejemplo, para una aseguradora dedicada al ramo de vida es crucial para determinar las primas del seguro, con la consecuente provisión para afrontar su pago. En el campo de las pensiones (concretamente en los planes de empleo, donde se establece un sistema de prestación definida), la esperanza de vida también incide en las previsiones de las futuras prestaciones a percibir por el beneficiario.

5.1. Cálculo de la esperanza de vida

Para el cálculo de la esperanza de vida al nacer, se realizan predicciones de las probabilidades anuales de supervivencia para los próximos 150 años. Este procedimiento se realiza por igual para cada sexo y dependiendo de si el infinito actuarial son 100 años o 150 años, es decir, finalmente se crean 4 matrices diferentes. Cada matriz contiene tantas columnas como años predichos (150). En cuanto a las filas, cada fila representa la edad del individuo para el que se realiza la predicción.

Previamente se ha definido que la esperanza de vida completa se calcula a partir del sumatorio de las probabilidades temporales de supervivencia más un medio. Las probabilidades temporales de supervivencia con temporalidad superior al año se calculan como:

$${}_t p_x = \prod_{y=0}^{t-1} p_{x+y}$$

Finalmente se dispone de 4 matrices con las probabilidades de supervivencia pronosticadas, donde las columnas representan los años predichos y las filas las edades de los individuos. Llegados a este punto es relevante especificar qué probabilidades debemos introducir para un óptimo cálculo de la esperanza de vida al nacer.

A continuación, se muestra un fragmento de una de dichas matrices, que facilitará la comprensión de este procedimiento:

Tabla 1

Matriz de probabilidades anuales de supervivencia pronosticadas

| Edad\Año | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0.997839 | 0.997934 | 0.998026 | 0.998113 | 0.998197 |
| 1 | 0.999818 | 0.999826 | 0.999834 | 0.999841 | 0.999848 |
| 2 | 0.999886 | 0.999891 | 0.999896 | 0.999901 | 0.999905 |
| 3 | 0.999914 | 0.999918 | 0.999922 | 0.999925 | 0.999929 |
| 4 | 0.999927 | 0.999930 | 0.999933 | 0.999937 | 0.999939 |

Intuitivamente y según las fórmulas mostradas anteriormente, uno podría pensar en calcular la esperanza de vida utilizando las probabilidades de supervivencia pertenecientes al 1º año:

Tabla 2

Matriz de probabilidades anuales de supervivencia pronosticadas

| Edad\Año | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 |
|----------|-----------------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0.997839 | 0.997934 | 0.998026 | 0.998113 | 0.998197 |
| 1 | 0.999818 | 0.999826 | 0.999834 | 0.999841 | 0.999848 |
| 2 | 0.999886 | 0.999891 | 0.999896 | 0.999901 | 0.999905 |
| 3 | 0.999914 | 0.999918 | 0.999922 | 0.999925 | 0.999929 |
| 4 | 0.999927 | 0.999930 | 0.999933 | 0.999937 | 0.999939 |

Este proceso es adecuado para calcular la edad media de fallecimiento en el año 2019. Sin embargo, las probabilidades de supervivencia y fallecimiento no se mantienen constantes con el transcurso del tiempo, sino que varían a lo largo del tiempo. Para el cálculo de la esperanza de vida al nacer en el año 2019, la probabilidad de supervivencia al nacer (p_0) estará en la fila 1 y columna 1. No obstante, pasado un año, la probabilidad de supervivencia para la siguiente edad ya no se situará en la primera columna, sino que realmente será la situada en la columna 2 y la fila 2. Y así sucesivamente para todas las edades. Por tanto, las probabilidades para el cálculo de la esperanza de vida se situarán en la diagonal de la matriz:

Tabla 3

Matriz de probabilidades anuales de supervivencia estimadas

| Edad\Año | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 |
|----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0 | 0.997839 | 0.997934 | 0.998026 | 0.998113 | 0.998197 |
| 1 | 0.999818 | 0.999826 | 0.999834 | 0.999841 | 0.999848 |
| 2 | 0.999886 | 0.999891 | 0.999896 | 0.999901 | 0.999905 |
| 3 | 0.999914 | 0.999918 | 0.999922 | 0.999925 | 0.999929 |
| 4 | 0.999927 | 0.999930 | 0.999933 | 0.999937 | 0.999939 |

Lo que pretende reflejar este apartado es la diferencia de trabajar con tablas mortalidad estáticas o dinámicas. Las primeras suponen que la mortalidad o la supervivencia permanece constante en el tiempo y a efectos prácticos se asume que al cabo de un lapso temporal van a recalcularse. Un ejemplo sería la tabla PASEM 2020 para el cálculo de la prima de los seguros y las coberturas de fallecimiento. Las tablas de mortalidad dinámicas capturan la evolución de la mortalidad a lo largo de los años. Un ejemplo de tablas dinámicas serían las tablas generacionales PER 2020.

En la Tabla 1 se muestra la esperanza de vida completa al nacer en el año 2019 para hombres y mujeres, suponiendo que el infinito actuarial se establece en los 100 años y los 125 años.

Tabla 4

Esperanza de vida completa al nacer en el año 2019

| | Esperanza de vida completa | Divergencia |
|----------------------|----------------------------|-------------|
| Hombres (0-125 años) | 90,21 | |
| Hombres (0-100 años) | 89,97 | 0,24 |
| Mujeres (0-125 años) | 95,19 | |
| Mujeres (0-100 años) | 94,26 | 0,93 |

Del mismo modo, en la Tabla 2 se calcula la vida media completa a los 65 años en el año 2019.

Tabla 5
Esperanza de vida completa a los 65 años en el año 2019

| Base de datos | Esperanza de vida completa | Divergencia |
|----------------------|----------------------------|-------------|
| Hombres (0-125 años) | 21,10 | |
| Hombres (0-100 años) | 21,04 | 0,06 |
| Mujeres (0-125 años) | 25,43 | |
| Mujeres (0-100 años) | 25,19 | 0,24 |

Los resultados reflejan que la selección del infinito actuarial en las tablas de mortalidad tiene un importante impacto en el cálculo de las esperanzas de vida, particularmente en el caso de las mujeres. Dicha divergencia puede ser relevante en el sector asegurador.

6. Impacto en las primas puras: un caso práctico

6.1. Cálculo de la prima de un seguro del ramo vida

En este apartado se analizará el efecto sobre la prima de los seguros si se incluyen las probabilidades predichas hasta los 125 años. No obstante, previamente cabe definir cómo se calcula la prima de un seguro del ramo de vida. En primer lugar, el precio final que retribuye el cliente se denomina la prima de tarifa. En ella se contemplan unos recargos de gestión destinados a cubrir los gastos administrativos. Además, dicha cuantía también contiene un sobreprecio que subsana las posibles desviaciones negativas del precio estimado que puedan acontecer, monto que se denomina prima de inventario. Si no se incluyen dichos recargos, se obtiene la prima pura, que contiene la cuantía total a desembolsar por el asegurado para cubrir los servicios demandados.

La prima pura puede ser única, cuando el precio equivale al valor actual actuarial (VAA) de la renta en cuestión, o periódica, que consiste en diferir y fraccionar el pago del VAA en diferentes periodicidades (ya sean anuales, mensuales, trimestrales...). En los seguros del ramo de vida y decesos, los servicios contratados consisten en uno o varios pagos a una determinada edad si se cumplen uno o más eventos relacionados con la muerte o la supervivencia del asegurado (o también de varios asegurados). Por tanto, el VAA consiste en actualizar financieramente la/s cantidad/es a percibir por el beneficiario del

contrato y además condicionar el pago de las mismas a la ocurrencia del suceso de riesgo. Nótese cómo al final el VAA es un valor esperado en un horizonte temporal, que puede computarse como la suma de cada pago esperado, por las propiedades de la esperanza:

$$VAA = {}_m/Va_{x:n} = \sum_{t=m}^{(m+n)-1} C_{t-m} \cdot (1 + I_1)^{-t} \cdot S_t$$

Donde:

x es la edad del asegurado.

m es el momento en que se inician los pagos, también conocido como el diferimiento del pago de las primas. Sería el caso de un seguro con una carencia de m años.

n la temporalidad, representa la duración de los pagos.

${}_m/Va_{x:n}$ representa el valor actual actuarial de un asegurado de edad x , con un diferimiento en el pago de m años y una temporalidad de n años.

C_{t-m} es la cuantía correspondiente a percibir por el beneficiario.

I_1 es el tipo de interés al que se valora la renta. Según la normativa de Solvencia II se debe tomar como valor aquel publicado en la ETTI de EIOPA.

S_t representará la probabilidad de ocurrencia de un suceso determinado en un momento t . Por ejemplo, para el caso de una renta de vida con sólo un asegurado será una ${}_t p_x$ y para los seguros o coberturas de fallecimiento sería en cambio una $(t-1)/q_x$, que es la probabilidad anual de fallecimiento diferida $t-1$ periodos. Normalmente, como en el sector se trabaja con tablas aprobadas por la Dirección General de Seguros, las probabilidades de supervivencia o fallecimiento se calculan a partir de la función cohorte, como:

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$t-1/q_x = \frac{l_{x+t-1} - l_{x+t}}{l_x}$$

La disparidad en la cuantía de la prima pura asumiendo un infinito actuarial de 100 años o de 125 años se deberá a la diferencia en las probabilidades temporales de fallecimiento o supervivencia. En el siguiente apartado se computarán diversos ejemplos de rentas que permitirán constatar el efecto de aumentar la edad del infinito actuarial en la prima pura.

6.2. Definición de los escenarios e hipótesis establecidas

Para realizar las diversas ilustraciones se han supuesto dos hipótesis que facilitan el cómputo de las primas:

- Por un lado, el interés efectivo anual empleado como base técnica de la actualización financiera es constante e igual en todos los ejemplos y recibe el valor de 2%. Este valor es arbitrario y no se corresponde con el interés técnico garantizado que anualmente publica la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones para el cálculo de las primas y las provisiones en los seguros de vida.
- Por el otro, tanto la periodicidad de las primas como la de los pagos realizados por la aseguradora es anual.

Alternativamente, se podría actualizar al tipo de interés correspondiente marcado por Solvencia II que alteraría en gran medida la cuantía final de la prima, ya que el VAA planteado anteriormente tiene gran sensibilidad a los cambios de tipo de interés. De la misma manera, se podría emplear una periodicidad distinta a la elegida, asumiendo alguna hipótesis para edades intermedias (como interpolación lineal, *balducci* o constancia del tanto de mortalidad). Sin embargo, la finalidad de dichos ejemplos es únicamente ilustrar el efecto del aumento del infinito actuarial sobre la prima.

6.2.1. Renta de supervivencia vitalicia

Para ilustrar lo anterior, se computa la prima de un seguro de vida vitalicio y pagadero al final de cada período para un sujeto de 45 años. Dicha cobertura se diferirá hasta los 65 años y el beneficiario recibirá una cuantía inicial de 6.000 €, creciente anualmente en 300€. Las primas se abonarán anualmente y un máximo de 20 años. El valor actual actuarial a calcular será:

Para las bases de datos que contiene como edad límite actuarial de 125 años:

$${}_{20|}Va_{45} = \sum_{t=20}^{78} (6.000 + 300 \cdot (t - 20)) \cdot 1,02^{-(t+1)} \cdot \frac{l_{45+t+1}}{l_{45}}$$

En cambio, para una edad límite de 100 años:

$${}_{20}V a_{45} = \sum_{t=20}^{53} (6.000 + 300 \cdot (t - 20)) \cdot 1,02^{-(t+1)} \cdot \frac{l_{45+t+1}}{l_{45}}$$

Finalmente, para calcular la prima pura (en ambos casos):

$$P \cdot \ddot{a}_{45:20} = {}_{20}V a_{45} \rightarrow P = \frac{{}_{20}V a_{45}}{\ddot{a}_{45:20}}$$

Donde:

$$\ddot{a}_{45:20} = \sum_{t=0}^{19} 1,02^{-t} \cdot \frac{l_{45+t}}{l_{45}}$$

Realizando dichos cálculos para las diferentes series de datos disponibles se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 6

Cálculo del valor actual actuarial y prima pura para renta de supervivencia vitalicia

| | Valor Actual Actuarial | Divergencia | Prima pura anual | Divergencia |
|----------------------|------------------------|-------------|------------------|-------------|
| Hombres (0-125 años) | 144.022,70 € | | 7.688,65 € | |
| Hombres (0-100 años) | 124.365,00 € | 19.657,70 € | 7.550,81 € | 137,84 € |
| Mujeres (0-125 años) | 151.509,00 € | | 9.139,37 € | |
| Mujeres (0-100 años) | 144.022,70 € | 7.486,30 € | 8.687,87 € | 451,49 € |

Se observa una diferencia considerable para este caso concreto si consideramos un infinito actuarial de 100 años o de 125 años. La divergencia es mayor en el caso de las mujeres. Anteriormente la esperanza de vida a los 65 años alcanzaba un valor mayor si consideraba 125 como infinito actuarial, especialmente en el caso de las mujeres.

6.2.2. Seguro de fallecimiento vitalicio

Como en el escenario anterior se ha mencionado que las mujeres muestran una divergencia mayor al comparar los distintos modelos de supervivencia, esta ejemplificación sólo se realizará para el caso femenino. En el presente caso el evento de riesgo es el fallecimiento del asegurado. Intuitivamente, la prima a pagar por el asegurado debería ser menor para el caso del infinito actuarial a los 125 años.

A continuación, se expone un seguro que cubre la muerte de una mujer de 50 años, inmediato y de vida entera, con una cuantía inicial de 50.000 €, creciente anualmente en 3.000 €. Las primas de dicha cobertura serán constantes y se pagarán un máximo de 20 anualidades.

$$VA_{50} = \sum_{t=0}^{74} (50.000 + 3.000 \cdot t) \cdot 1,02^{-(t+1)} \cdot \frac{l_{50+t} - l_{50+t+1}}{l_{50}}$$

$$VA_{50} = \sum_{t=0}^{49} (50.000 + 3.000 \cdot t) \cdot 1,02^{-(t+1)} \cdot \frac{l_{50+t} - l_{50+t+1}}{l_{50}}$$

$$P \cdot \ddot{a}_{50:20} = VA_{50} \rightarrow P = \frac{VA_{50}}{\ddot{a}_{50:20}}$$

Tabla 7

Cálculo de valor actual actuarial y prima pura para el seguro de fallecimiento vitalicio

| Base de datos | Valor Actual | | Prima pura | |
|----------------------|--------------|-------------|------------|-------------|
| | Actuarial | Divergencia | anual | Divergencia |
| Mujeres (0-125 años) | 73.509,72 € | | 4.440,17 € | |
| Mujeres (0-100 años) | 55.739,34 € | 17.770,38 € | 3.366,84 € | 1.073,33 € |

Contrariamente a lo esperado, para este caso la prima pura sería mayor para el caso del infinito actuarial de 125 años. No obstante, existe una explicación: el valor actual actuarial es mayor en el caso de límite en los 125 años, al ser un seguro de vida entera y con cuantía creciente con la edad.

6.2.3. Seguro de fallecimiento temporal

A continuación, pasamos a contemplar el efecto de la disparidad en las probabilidades en un seguro de fallecimiento diferido 5 años y con una temporalidad de 15 anualidades. Este caso permitirá observar nítidamente el efecto en la variación de la probabilidad en ambos escenarios. La cuantía inicial será de 75.000 €, creciente un 3,5% anual acumulativo. El precio a abonar por la cobertura será constante y se pagará en anualidades con un máximo de 5 años.

$${}_5VA_{50;15} = \sum_{t=5}^{19} 75.000 \cdot 1,035^{t-5} \cdot 1,02^{-(t+1)} \cdot \frac{l_{50+t} - l_{50+t+1}}{l_{50}}$$

Tabla 8

Cálculo de valor actual actuarial y prima pura seguro de fallecimiento temporal

| Base de datos | Valor Actual | | Prima pura | |
|----------------------|--------------|-------------|------------|-------------|
| | Actuarial | Divergencia | anual | Divergencia |
| Mujeres (0-125 años) | 1.012,40 € | | 210,88 € | |
| Mujeres (0-100 años) | 1.015,16 € | -2,76 € | 211,45 € | -0,58 € |

6.2.4. Renta de supervivencia diferida y temporal

Por último, se pretende obtener el precio una renta de supervivencia para un sujeto de 45 años. Las características del seguro son: diferido 20 años, con una duración de igual temporalidad. De la misma manera que en el caso de fallecimiento, esta cobertura permitirá medir el impacto de la variación de las probabilidades de supervivencia. El pago inicial sería de 6.000 € crecientes en 300 € anualmente. El VAA correspondiente es igual a:

$${}_{20}Va_{45;20} = \sum_{t=20}^{39} (6.000 + 300 \cdot (t - 20)) \cdot 1,02^{-(t+1)} \cdot \frac{l_{45+t+1}}{l_{45}}$$

Y para la prima pura²:

$$P \cdot \ddot{a}_{45:20} = {}_{20}Va_{45:20} \rightarrow P = \frac{{}_{20}Va_{45:20}}{\ddot{a}_{45:20}}$$

Tabla 9

Cálculo de valor actual actuarial y prima pura renta de supervivencia diferida y temporal

| Base de datos | Valor Actual Actuarial | Divergencia | Prima pura anual | Divergencia |
|----------------------|------------------------|-------------|------------------|-------------|
| Hombres (0-125 años) | 86.106,07 € | | 5.227,89 € | |
| Hombres (0-100 años) | 860.101,00 € | 5,07 € | 5.227,61 € | 0,28 € |
| Mujeres (0-125 años) | 92.093,09 € | | 5.555,26 € | |
| Mujeres (0-100 años) | 92.082,90 € | 10,19 € | 5.554,71 € | 0,55 € |

En conclusión, el aumento del infinito actuarial causa un efecto u otro dependiendo del tipo de cobertura en cuestión. Para el caso de seguros de supervivencia la prima pura aumentará; en las coberturas de fallecimiento, en cambio, el precio del seguro disminuirá, suponiendo un ahorro para la aseguradora.

7. Conclusiones

Exceptuando los años 2020 y 2021 en los que la pandemia de la COVID-19 ha hecho disminuir la probabilidad de supervivencia en edades avanzadas, la mortalidad en las últimas décadas ha mejorado de forma continua para todas las edades. Todo apunta a que el progreso de la longevidad continuará en el futuro. En la actualidad, para realizar predicciones sobre el comportamiento futuro de la mortalidad, es común en la práctica emplear los modelos estocásticos de mortalidad, como por ejemplo el de Lee-Carter.

En la medida en que las probabilidades de supervivencia mejoran con el paso de los años, cabría esperar que también aumente el infinito actuarial. Ahora bien, los modelos estocásticos de mortalidad se basan en datos históricos para realizar las proyecciones futuras del comportamiento de la mortalidad. Por

² Donde el término $\ddot{a}_{45:20}$ es el mismo que el del apartado 6.2.1

tanto, es conveniente disponer de datos históricos fiables para alcanzar una mayor exactitud en las predicciones. Es habitual que en el ajuste de los modelos estocásticos se excluyan con frecuencia las edades extremas, debido a la baja fiabilidad de los datos en las últimas edades. En este artículo, se presenta un método sencillo que permite estimar la mortalidad de las edades extremas. De esta forma, logra generar pseudo-datos históricos que combinan datos observados de mortalidad con datos estimados de mortalidad para edades extremas. Por consiguiente, se puede incrementar el infinito actuarial y aplicar los modelos estocásticos de mortalidad para predecir también el comportamiento futuro en las edades extremas.

Mediante un conjunto de escenarios, se demuestra que el aumento del infinito actuarial puede tener un impacto importante en el valor actual actuarial en los productos aseguradores del ramo de vida. Las tablas sectoriales publicadas recientemente, PASEM 2020 y PER 2020, fijan el infinito actuarial en los 120 años. No obstante, es esencial que las compañías de seguros evalúen el riesgo de longevidad específico de sus carteras de asegurados y el impacto que la variación del infinito actuarial representa sobre sus carteras.

8. Agradecimientos

M. Santolino agradece el apoyo de la *Secretaria d'Universitats i Recerca del departament d'Empresa i Coneixement* de la Generalitat de Catalunya mediante el proyecto de PANDEMIES 2020 (2020-PANDE-00074) y del Ministerio de Ciencia e Innovación PID2019-105986GB-C21.

9. Referencias

- Ayuso, M. H. Corrales, Guillén, M., Pérez-Marín A. M. y Rojo, J. L. (2007). *Estadística Actuarial Vida*. Edicions Universitat de Barcelona. Barcelona. <https://www.rdocumentation.org/packages/base/versions/3.6.2/topics/cbind>
- Cebrino Casquero, F. (2012). Esperanza de vida en España. *eXtoikos* 5, 135-137.
- De la Fuente, L., Brugal, M. T., Domingo-Salvany, A., Bravo, M. J., Neira-León, M. y Barrio, G. (2006). Más de treinta años de drogas ilegales en España: una amarga historia con algunos consejos para el futuro. *Revista Española de Salud Pública*, 80, 505-520.

- Gavrilov, L. A. y Gavrilova, N. S. (2019). New Trend in Old-Age Mortality: Gompertzialization of Mortality Trajectory. *Gerontology*, 65, 451-457.
- Goerlich Gisbert, F. J. y Pinilla Pallejà, R. (2006). *Esperanza de vida en España a lo largo del siglo XX*. Fundación BBVA. https://www.fbbva.es/wp-content/uploads/2017/05/dat/DT_2006_11.pdf
- Gompertz, B. (1825). On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 115, 513-585.
- Gutiérrez, A. (17 de diciembre de 2018). Los accidentes de tráfico, principal causa de muerte en jóvenes. *Tráfico y seguridad vial*. <https://revista.dgt.es/es/noticias/internacional/2018/1218oms-informe-mundial-accidentes-trafico.shtml>
- HMD (2021). *Human Mortality Database* <https://www.mortality.org/>
- Hyndman, R. J., Booth, H., Tickle, L., Maingdonald, J. (2019), *Demography: Forecasting mortality, fertility, migration and population data*. R package version 1.18.
- Lee R. D. y Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association* 87(419), 659-671.
- López Ramos, C. (2020). ¿Por qué las mujeres viven más que los hombres? Una revisión desde el punto de vista biológico. *Revista de Salud Ambiental*, 20(2), 160-166. <https://ojs.diffundit.com/index.php/rsa/article/view/1047/974>
- Macías, Y. y Santolino, M. (2018). Aplicación de los modelos Lee-Carter y Renshaw-Haberman en los seguros de vida y mixtos. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles* 24, 53-78.
- Moyano Silva, P. Pérez Marín, A. M. y Santolino, M. (2020) Estimación de modelos de mortalidad estocástica para Chile. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 26, 225-256.
- Pascariu, M.D. (2018). MortalityLaws: Parametric Mortality Models, Life Tables and HMD. R package version 1.8.5. <https://github.com/mpascariu/MortalityLaws>
- R Core Team. (2022). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, 7 edition. Vienna: R Foundation for Statistical Computing.
- Segura Cardona, A. M., Doris Cardona, A., Berbesí Fernández, Dedsy Yajaira y Agudelo Martínez, A. (2017). Mortalidad por accidente de tránsito en el adulto mayor en Colombia. *Revista de Saúde Pública*, 51, 21. https://www.scielo.br/pdf/rsp/v51/es_0034-8910-rsp-S1518-87872017051006405.pdf
- Villegas, A. M., Millosovich, P. y Kaishev, V. K. (2017). StMoMo: Stochastic mortality modeling in R. *Journal of Statistical Software*, 84(3), 1-38.