

**APPLICATION OF LEE-CARTER AND RENSHAW-HABERMAN
MODELS IN LIFE INSURANCE PRODUCTS**

**APLICACIÓN DE LOS MODELOS LEE-CARTER Y RENSHAW-
HABERMAN EN LOS SEGUROS DE VIDA Y MIXTOS**

Yovanna Macias, Miguel Santolino^{1*}

Abstract

The article analyzes differences between estimated premiums in life and mixed insurance products using the mortality/life tables for the Spanish insured population with the estimated premiums if we rely on the mortality/life tables based on the predictions made by the Lee-Carter model and the Renshaw-Haberman model. In the proposed scenarios, it is observed that the premiums calculated using the PASEM 2010 mortality tables are higher than those based on the Lee-Carter and Renshaw-Haberman models. However, it does not longer hold when the PERMF-2000P life tables are applied.

Keywords: Mortality tables, provisions, risk management, longevity.

Resumen

En este artículo se pretende analizar las diferencias, si existen, entre las primas estimadas en seguros de vida y mixtos utilizando las tablas de mortalidad/supervivencia para la población asegurada española con las primas estimadas si nos basamos en las tablas de mortalidad creadas a través de las predicciones realizadas por el modelo Lee-Carter y el modelo Renshaw-Haberman. En los escenarios propuestos se observa que las primas calculadas mediante las tablas de mortalidad PASEM 2010 son superiores a las basadas en los modelos Lee-Carter y Renshaw-Haberman. En cambio, no ocurre lo mismo cuando se utilizan las tablas de supervivencia PERMF-2000P.

M. Santolino agradece la financiación recibida por los proyectos del Ministerio de Economía y Competitividad/FEDER ECO2015-66314-R y ECO2016-76203-C2-2-P.

¹ Riskcenter - Research Group on Risk in Insurance and Finance, Av. Diagonal, 690 (08034), Barcelona, Spain.

*Autor para correspondencia (msantolino@ub.edu).

Palabras clave: Tablas de mortalidad, reservas, gestión del riesgo, longevidad.

1. Introducción

En las últimas décadas se han reducido sustancialmente las tasas de mortalidad de la población, lo que ha provocado que en promedio vivamos más años que la generación de nuestros abuelos e, incluso, la de nuestros padres. En España, por ejemplo, se ha pasado de una esperanza de vida al nacer de aproximadamente 73 años en el año 1975 a una esperanza de vida superior a los 83 años en el año 2017, superando los 85 en el caso de las mujeres (INE, 2018a). En el futuro más cercano todo indica que se mantendrá o incluso se acelerará esta tendencia de disminución de la mortalidad (INE, 2018b).

Conocer el comportamiento de la evolución de la mortalidad de la población tiene un gran interés para la sociedad. El continuo incremento en la longevidad de la población afecta, de manera directa, a la planificación de los sistemas sanitarios y de pensiones. La adecuada modelización de la proyección de la tendencia de la mortalidad es un importante desafío en un amplio número de áreas como, por ejemplo, en los sistemas de pensiones, políticas de sanidad o, en el ámbito de los seguros, para la tarificación en los seguros del ramo de vida.

En este artículo se aplican el modelo de Lee-Carter (1992) y el modelo de Renshaw-Haberman (2006) para modelizar la evolución de la mortalidad de la sociedad española. Estos dos modelos han sido ampliamente utilizados para modelizar las proyecciones futuras de mortalidad. El modelo Lee-Carter ha sido utilizado para realizar predicciones del índice de mortalidad en diversos países como, por ejemplo, en Estados Unidos (Lee y Carter, 1992), Canadá (Lee y Nault, 1993), Chile (Lee y Rofman, 1994), Japón (Wilmoth, 1996), en los siete países que forman el G7 (Tuljapurkar *et al.*, 2000), Bélgica (Brouhns *et al.*, 2002) o Suecia (Lundström y Qvist, 2002). Este modelo se caracteriza por su sencillez y su robustez en situaciones donde las tasas logarítmicas de la mortalidad por edades específicas tienen una tendencia lineal.

Renshaw y Haberman (2006) se basan en el modelo Lee-Carter y muestran que no se ajusta satisfactoriamente para modelizar las proyecciones de mortalidad en Reino Unido. Los autores proponen una extensión del modelo que incluya el efecto de la cohorte. En España, estos modelos han sido

utilizados por diversos autores para modelizar las proyecciones de mortalidad (Betzen, 2010; Debón *et al.*, 2015).

Aunque en el presente trabajo nos centramos en el modelo de Lee-Carter y el de Renshaw-Haberman, otras interesantes propuestas de modelización han sido desarrolladas en la literatura como son, por ejemplo, el modelo de Cairns-Blake-Down (CBD) y el modelo de Plat. El modelo CBD modeliza el logit de la probabilidad anual de mortalidad mediante dos factores temporales, el primero independiente de la edad y el segundo en base a la diferencia de la edad con respecto la edad media muestral (Cairns *et al.*, 2006). Plat (2009), a su vez, combina el modelo CBD y el modelo Lee-Carter de forma que se capture el efecto cohorte. Para una recopilación de modelos, véase Villegas *et al.* (2017).

En este artículo, mediante un conjunto de escenarios, comparamos las primas calculadas en seguros de vida y mixtos utilizando las tablas de mortalidad específicas para la población asegurada española con las primas estimadas si nos basamos en las tablas de mortalidad creadas a través de las predicciones realizadas por el modelo Lee-Carter y el modelo Renshaw-Haberman para la población general española.

El artículo se estructura de la siguiente forma. A continuación se describen los modelos. En el apartado 3 se presentan los datos y los escenarios. En el apartado 4 se muestran los resultados del ajuste de los modelos. En el apartado 5 se comparan las primas en el ramo de vida para distintos escenarios. En el apartado 6 se muestran las principales conclusiones del trabajo.

2. Modelos de predicción de mortalidad

Supongamos el tanto central de mortalidad $m_{x,t}$ para individuos de edad x en el año de calendario t , $m_{x,t} = \frac{y_{x,t}}{E_{x,t}}$ donde $y_{x,t}$ representa el número de fallecimientos a la edad x en el periodo t con $t=t_1, \dots, t_n$, y $E_{x,t}$ es la función censal de supervivencia e indica la exposición al riesgo (Ayuso *et al.*, 2007).

2.1 Modelo Lee-Carter

El modelo de Lee-Carter lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x^{(1)}k_t + \varepsilon_{x,t} \quad (1)$$

donde:

a_x : parámetro independiente del tiempo que indica el patrón de mortalidad para cada una de las edades.

$b_x^{(1)}$: parámetro que representa las desviaciones de cambio de mortalidad para cada edad en relación a la tendencia global.

k_t : parámetro que captura la principal tendencia temporal, en escala logarítmica, en las tasas de mortalidad de todas las edades.

$\varepsilon_{x,t}$: es el término de error, el cual refleja todos aquellos aspectos no recogidos por el modelo.

Para poder obtener una única solución para el sistema de ecuaciones del modelo debemos tener en cuenta las siguientes restricciones (Lee-Carter, 1992):

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_x b_x^{(1)} = 1. \\ (2) \quad & \sum_{t=t_1}^{t_n} k_t = 0. \end{aligned}$$

2.1.1 Estimación de los parámetros

En el artículo original, los autores propusieron un método de estimación que minimiza el error cuadrático medio, mediante la descomposición en valores singulares (Lee y Carter, 1992). Los autores proponen ajustar el modelo en dos etapas. Se pretende obtener el valor de los parámetros que minimicen

$$\sum_{x,t} \left(\ln(m_{x,t}) - (a_x + b_x^{(1)}k_t) \right)^2$$

Si derivamos respecto a a_x e igualamos a cero, teniendo en cuenta la segunda restricción, se obtiene que

$$\hat{a}_x = \frac{1}{n} \sum_{t=t_1}^{t_n} \ln(m_{x,t}) \quad (2)$$

Posteriormente se aplica la descomposición en valores singulares de la matriz $Z_{x,t} = \ln(m_{x,t}) - \hat{a}_x$, donde $Z_{x,t} = b_x^{(1)} k_t$, para estimar los parámetros de $b_x^{(1)}$ y k_t . Debido a que el modelo ajusta el logaritmo del tanto central de mortalidad y no el tanto central de mortalidad directamente, Lee (2000) propone una serie de ajustes para recalibrar \hat{k}_t de tal forma que se garantice que el número total de fallecidos observados en cada año coincide con el número total estimado.

Posteriormente, en la literatura se han propuesto diferentes métodos de estimación como son el de mínimos cuadrados ponderados o maximizar la función de verosimilitud mediante algoritmos iterativos (Wilmoth, 1993; Brouhns *et al.*, 2002; Renshaw y Haberman, 2006). Más recientemente, Villegas *et al.* (2017) proponen estimar los parámetros mediante la estructura de modelos lineales no generalizados. Nosotros aquí seguimos el método iterativo de maximización de la función de verosimilitud propuesto por Renshaw and Haberman (2006).

Supongamos que la estructura del error se distribuye según una Poisson. La variable aleatoria, número de fallecimientos a la edad x en el periodo t se distribuye según una Poisson, $Y_{x,t}$ tiene los siguientes dos primeros momentos, $E[Y_{x,t}] = E[m_{x,t} \cdot E_{x,t}]$ y $\text{Var}[Y_{x,t}] = \varphi E[Y_{x,t}]$ donde φ mide la sobredispersión. El modelo de Lee-Carter se puede expresar,

$$\ln(y_{x,t}) = \ln(E_{x,t}) + a_x + b_x^{(1)} k_t \quad (3)$$

Una medida de bondad global del ajuste es la *scaled deviance* entre los valores ajustados y observados $D(y_{x,t}, \hat{y}_{x,t})$. Los estimadores máximo-verosímiles hacen mínimo el valor del *scaled deviance*. En el caso de la distribución de Poisson, $D(y_{x,t}, \hat{y}_{x,t})$ tiene la siguiente expresión:

$$D(y_{x,t}, \hat{y}_{x,t}) = \sum_x \sum_t 2\omega_{x,t} \left\{ y_{x,t} \ln \left(\frac{y_{x,t}}{\hat{y}_{x,t}} \right) - (y_{x,t} - \hat{y}_{x,t}) \right\} \quad (4)$$

donde $\omega_{x,t}$ es igual a uno si $E_{x,t}$ es estrictamente positivo y cero en caso contrario.

La estimación de los parámetros se realiza mediante un proceso iterativo con los siguientes pasos,

- 1- Damos valores iniciales \hat{a}_x según (3), $\hat{b}_x^{(1)} = \frac{1}{K}$ y $\hat{k}_t = \frac{1}{K}$, con K es el número de edades diferentes consideradas. Calculamos $\hat{y}_{x,t}$.
- 2- Actualizamos \hat{a}_x y calculamos $\hat{y}_{x,t}$ y $D(y_{x,t}, \hat{y}_{x,t})$.
- 3- Actualizamos \hat{k}_t y calculamos $\hat{y}_{x,t}$.
- 4- Actualizamos \hat{b}_x y calculamos $\hat{y}_{x,t}$ y $D_u(y_{x,t}, \hat{y}_{x,t})$.
- 5- Analizamos convergencia ΔD . Si $\Delta D > \eta$ ir a paso 2. El proceso para cuando $\Delta D < \eta$, con η siendo un valor infinitesimal.
- 6- Una vez se alcanza la convergencia, re-escalamos $\hat{b}_x^{(1)} = \frac{\hat{b}_x^{(1)}}{\sum_x \hat{b}_x^{(1)}}$ y $\hat{k}_t = \hat{k}_t (\sum_x \hat{b}_x^{(1)})$ para garantizar que se cumplen las restricciones del modelo.

La actualización de los estimadores se realiza mediante el método de minimización de la función *deviance* de Newton-Raphson, que puede expresarse como $u(\hat{\theta}) = \hat{\theta} - \frac{\partial D / \partial \hat{\theta}}{\partial^2 D / \partial \hat{\theta}^2}$. En Renshaw y Haberman (2006) pueden consultarse las expresiones de actualización para cada parámetro estimado.

2.1.2 Predicción del tanto central de mortalidad

Para predecir el tanto central de mortalidad mediante Lee-Carter, únicamente tenemos que predecir el índice k_t . Carter y Lee (1992) propusieron originalmente un modelo ARIMA(0,1,0), es decir, un modelo paseo aleatorio con constante que ha sido ampliamente aceptado en la literatura (Haberman y Renshaw, 2011; Danesi *et al.*, 2015; Villegas *et al.*, 2017). En este artículo asumimos que k_t sigue un paseo aleatorio con constante.

Supongamos que tenemos la siguiente serie temporal k_{t_1}, \dots, k_{t_n} , entonces el modelo de paseo aleatorio con constante, se expresa como:

$$k_{t_i} = k_{t_{i-1}} + \theta + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad i=2, \dots, n. \quad (5)$$

donde ε_i es el término de error y θ es el término constante.

El estimador de θ es $\hat{\theta} = (k_{t_n} - k_{t_1}) / (n - 1)$ y de σ^2 es $\hat{\sigma}^2 = \sum_2^n (v_{t_i} - \hat{\theta})^2 / (n - 2)$, donde $v_{t_i} = k_{t_i} - k_{t_{i-1}}$. La varianza del estimador es

$\text{Var}(\hat{\theta}) = \hat{\sigma}^2 / (n-1)$. El intervalo de confianza al 95% es $\hat{\theta} \pm 1,96 \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}$. Finalmente, la proyección de s periodos es $\tilde{k}_{t_{n+s}} = k_{t_n} + s\hat{\theta}$, con varianza $\text{Var}(\tilde{k}_{t_{n+s}}) = s^2 \text{Var}(\hat{\theta})$.

2.2 Modelo Renshaw-Haberman

Renshaw y Haberman (2006) extienden el modelo Lee-Carter expresado en (3) introduciendo el efecto de la cohorte de la siguiente manera:

$$\ln(y_{x,t}) = \ln(E_{x,t}) + a_x + b_x^{(0)} y_{t-x} + b_x^{(1)} k_t \quad (6)$$

donde se incorpora $b_x^{(0)} y_{t-x}$, con y_{t-x} recoge el efecto global de la cohorte, $z=t-x$. Cabe señalar que $b_x^{(0)}$ recoge las desviaciones de la edad con el efecto global de la cohorte. El resto de elementos son los del modelo Lee-Carter. Para poder estimar los parámetros, a las restricciones del modelo Lee-Carter le añadimos la restricción $\sum_x b_x^{(0)} = 1$.

La estimación de los parámetros se puede realizar mediante el proceso iterativo definido en el apartado 2.1.3 con los siguientes ajustes.

- 1- Estimamos \hat{a}_x según (3).
- 2- Damos valores iniciales $\hat{b}_x^{(0)} = \hat{b}_x^{(1)} = \frac{1}{K}$ y $\hat{k}_t = \frac{1}{K}$, con K es el número de edades diferentes consideradas.
- 3- Estimamos el modelo simplificado $\ln(y_{x,t}) = (a_x + \ln(E_{x,t})) + y_z + k_t$ para obtener valores iniciales de $y_z + k_t$. La suma $a_x + \ln(E_{x,t})$ se trata como una variable de exposición (*offset*). Calculamos $\hat{y}_{x,t}$ y $D(y_{x,t}, \hat{y}_{x,t})$.
- 4- Actualizamos \hat{y}_z y calculamos $\hat{y}_{x,t}$.
- 5- Actualizamos $\hat{b}_x^{(0)}$ y calculamos $\hat{y}_{x,t}$.
- 6- Actualizamos \hat{k}_t y calculamos $\hat{y}_{x,t}$.
- 7- Actualizamos $\hat{b}_x^{(1)}$ y calculamos $\hat{y}_{x,t}$ y $D_u(y_{x,t}, \hat{y}_{x,t})$.
- 8- Analizamos convergencia ΔD . Si $\Delta D > \eta$ ir a paso 4. El proceso para cuando $\Delta D < \eta$, con η siendo un valor infinitesimal.
- 9- Una vez se alcanza la convergencia, re-escalamos $\hat{b}_x^{(0)} = \frac{\hat{b}_x^{(0)}}{\sum_x \hat{b}_x^{(0)}}$,

$$\hat{b}_x^{(1)} = \frac{\hat{b}_x^{(1)}}{\sum_x \hat{b}_x^{(1)}} \text{ y } \hat{k}_t = \hat{k}_t (\sum_x \hat{b}_x).$$

La estimación de este modelo es a menudo inestable, sin llegar a alcanzar la convergencia en el proceso iterativo. Por este motivo, los autores sugieren utilizar el siguiente caso particular de la estructura propuesta en (7) con $b_x^{(0)} = 1$ (Haberman y Renshaw, 2011). Obviamente, no cumplirá la restricción $\sum_x b_x^{(0)}=1$, pero esta restricción no afecta a la estimación del modelo sino que es únicamente necesaria para garantizar la identificabilidad de los parámetros.

2.2.1 Predicción del tanto central de mortalidad

Para predecir el tanto central de mortalidad tenemos que predecir el índice k_t y, a diferencia del modelo Lee-Carter, un segundo índice asociado a la cohorte y_{t-x} . Para el primer índice se considera un proceso ruido blanco con constante al igual que en el modelo de Lee-Carter.

Para predecir el segundo índice, se asume que ambos índices son independientes y, frecuentemente se considera que y_{t-x} sigue un proceso ruido blanco con constante 0, como nosotros en este trabajo, una ARIMA(1,1,0). Es decir, asumimos que el índice y_z con $z=t-x$ sigue el siguiente proceso estocástico,

$$y_z = y_{z-1} + \theta + \phi(y_{z-1} - y_{z-2}) + \varepsilon_z, \quad \varepsilon_z \sim N(0, \sigma^2).$$

3. Datos y escenarios

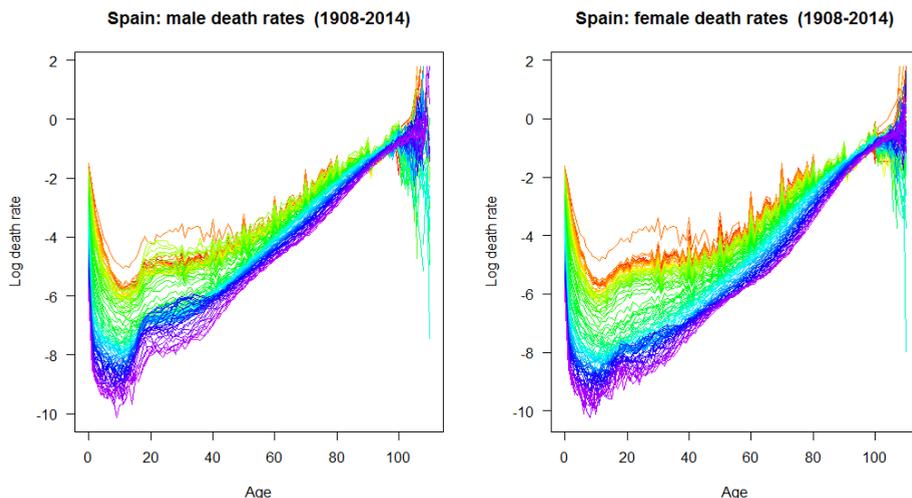
3.1 Evolución de la mortalidad en España

A continuación analizaremos la mortalidad en España en el periodo que comprende desde 1908 a 2014. Los datos se han extraído de la base de datos *The Human Mortality Database* (www.mortality.org). El año 2014 es el último año disponible. En el Gráfico 1 se muestra el tanto central de mortalidad según la edad (en logaritmos) para hombres y mujeres para el periodo entre 1908 y 2014.

En ambos gráficos podemos apreciar como el comportamiento es parecido. Al nacer, la tasa de mortalidad es elevada y en los primeros años de vida disminuye de forma drástica hasta, aproximadamente, los 10 años donde empieza a incrementarse paulatinamente. También se observa que el valor del tanto central de mortalidad ha ido disminuyendo para cada una de las

edades durante el periodo analizado, especialmente en las edades más jóvenes. Por último, destacar que, aunque ambos gráficos son similares, el valor del tanto central de mortalidad observado para las mujeres es inferior al observado para los hombres en todas las edades.

Gráfico 1. Evolución del tanto central de mortalidad en España para hombres y mujeres (1908-2014)

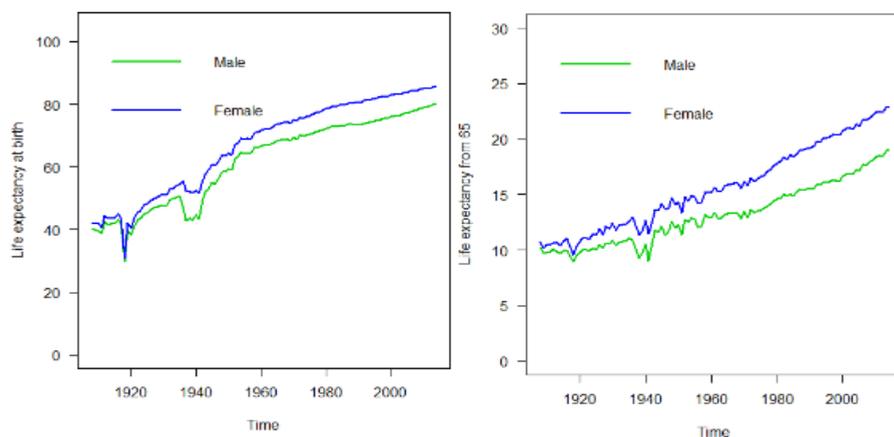


En el Gráfico 2 se muestra para el periodo analizado la evolución de la esperanza de vida al nacer (Gráfico 2, izquierdo) y del número esperado de años que vivirá en promedio una persona a partir de los 65 años (Gráfico 2, derecho).

Como se puede apreciar, para ambos géneros, la esperanza de vida se ha doblado en el periodo analizado. La esperanza de vida al nacer en 1908 de un hombre era de 40,47 años, y la de una mujer 42,31 años. En el año 2014 la esperanza de vida al nacer de un hombre era de 80,10 años, y de una mujer era de 85,64 años. Durante todo el periodo analizado la tendencia de la esperanza de vida ha sido creciente, excepto en dos momentos puntuales de la historia española. En concreto, observamos en el 1918 una gran disminución de la esperanza de vida. Ese año España sufrió una gran pandemia de gripe, denominada la gripe española. La segunda disminución de la esperanza de vida se observa en el periodo de la Guerra Civil Española (1936-1939) y primeros años de postguerra. Si nos centramos en el número esperado de años que sobrevivirán las personas con 65 años (Gráfico 2,

derecha), se aprecia que ha ido incrementando la diferencia entre el número de años de los hombres y de las mujeres.

Gráfico 2. Evolución de la esperanza de vida (derecha) y del número esperado de años que sobrevive una persona de 65 años (izquierda) en el periodo 1908-2014



3.2 Definición de los escenarios

El objetivo del artículo consiste en analizar las diferencias, si existen, entre las primas calculadas para distintos productos aseguradores teniendo en cuenta diferentes tablas de mortalidad/supervivencia. Para llevar a cabo la comparación, en primer lugar presentamos los dos escenarios para los que calcularemos las primas. Los dos escenarios que proponemos hacen referencias a personas que quieren contratar productos aseguradores que les garanticen unas rentas durante el periodo de jubilación o, en caso de fallecimiento, un capital asegurado a los beneficiarios. Estos escenarios tienen un propósito meramente ilustrativo. Se han seleccionado estos escenarios puesto que los productos aseguradores en el ramo de vida tienen una especial importancia para los asegurados cuando desean completar los ingresos obtenidos con las pensiones públicas en el periodo de jubilación. Cabe señalar que el hecho de tener pocas observaciones en edades longevas puede suponer una mayor variabilidad en las predicciones (véase, por ejemplo, Li *et al.*, 2004)

Primer escenario

En el primer escenario consideramos un hombre que en el año 2015 tiene 65 años. Quiere contratar un seguro pagadero al final del año de fallecimiento de cuantía 60.000 euros, si éste ocurre en los próximos 25 años. Al mismo tiempo, contrata una renta anual de 5.000 euros hasta los 90 años. El primer cobro lo recibirá al cumplir los 66 años. Para ambos productos el tipo de interés considerado es del 1,5% efectivo anual.

Segundo escenario

En el segundo escenario consideramos a un hombre que en el año 2015 tiene 50 años. Quiere contratar un seguro pagadero al final del año de fallecimiento de cuantía 100.000 euros, si éste ocurre antes que cumpla 65 años. Al mismo tiempo, contrata una renta anual de 12.000 euros desde los 65 años hasta los 90 años. El primer cobro lo recibirá al llegar a los 65 años. Para ambos productos el tipo de interés considerado es del 1,5% efectivo anual.

4. Ajuste de los modelos Lee-Carter y Renshaw-Haberman

La elección del periodo considerado del conjunto de datos para la estimación del modelo es un aspecto importante. En el ajuste de los modelos consideraremos el periodo 1975-2014. Esta elección la hemos realizado porque en los años 70 es cuando se puede considerar que la sociedad española pasó de ser una sociedad en vías de desarrollo a una sociedad avanzada. Un criterio alternativo podría ser considerar el periodo más amplio para el cual se disponga de datos razonablemente buenos. Por ejemplo, Renshaw y Haberman empezaron el análisis en el 1961 para Inglaterra y Gales (Renshaw y Haberman, 2006). En nuestro caso, el uso de datos de mortalidad anteriores podría reflejar el comportamiento en la mortalidad de una sociedad aún en vías de desarrollo. Es decir, presumiblemente, se obtendrían unas predicciones de tasas de mortalidad mayores si se ampliase el periodo observación de los datos.

Del mismo modo, puesto que las tablas de mortalidad/supervivencia las queremos generar para hombres entre los 50 y los 90 años, nos centraremos en esta franja de edades para la estimación de los modelos. Los cálculos se han realizado en R. Los paquetes específicos utilizados para el análisis son *demography*, *ilc* y *StMoMo*.

En los Gráficos 3 y 4 se muestran los parámetros estimados de los modelos Lee-Carter y Renshaw-Haberman, respectivamente. Como puede apreciarse, la forma de la función estimada a_x y la de k_t es muy similar para ambos modelos. Cabe recordar que a_x captura el patrón del tanto central de mortalidad para cada una de las edades. En cambio, k_t captura la tendencia temporal de variación del tanto central de mortalidad. Ambos en escala logarítmica. En ambos modelos, a_x muestra una forma lineal con la edad con pendiente positiva y k_t una forma lineal con el tiempo con pendiente negativa. Es decir, el tanto central de mortalidad aumenta con la edad y disminuye con el tiempo de calendario.

Ahora bien, la forma de la función $b_x^{(1)}$ es diferente en ambos gráficos. En el caso del modelo Renshaw-Haberman, $b_x^{(1)}$ tiene una forma creciente, suavizándose dicho crecimiento para las edades avanzadas. En cambio, en el caso del modelo Lee-Carter, el patrón de comportamiento de $b_x^{(1)}$ es más irregular, siendo decreciente hasta mediados de los 50, para después ser creciente, hasta las edades más avanzadas que vuelve a ser decreciente. Este comportamiento más irregular probablemente se deba a que $b_x^{(1)}$ esta capturando las desviaciones del cambio de mortalidad para cada edad, pero también desviaciones a la mortalidad debidas a la cohorte o generación. Al separarse el efecto de la cohorte al de la edad, como es el caso del modelo Renshaw-Haberman, el comportamiento del parámetro dependiente de la edad es más regular. En el modelo Renshaw-Haberman la función que captura el efecto de la cohorte muestra una forma cuadrática.

Gráfico 3. Estimación de los parámetros del modelo Lee-Carter

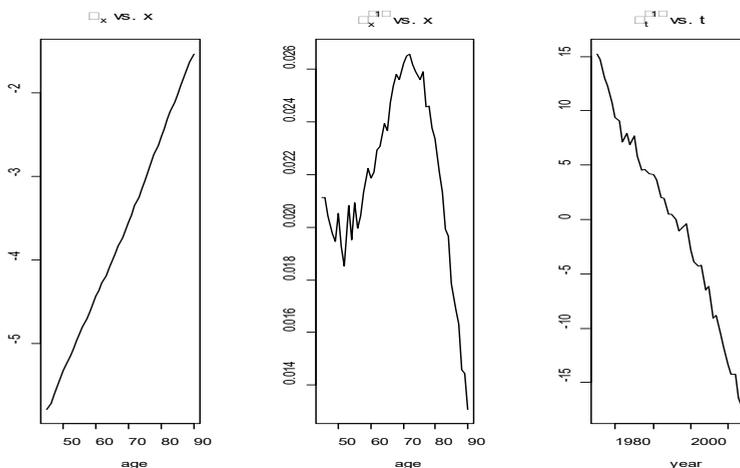
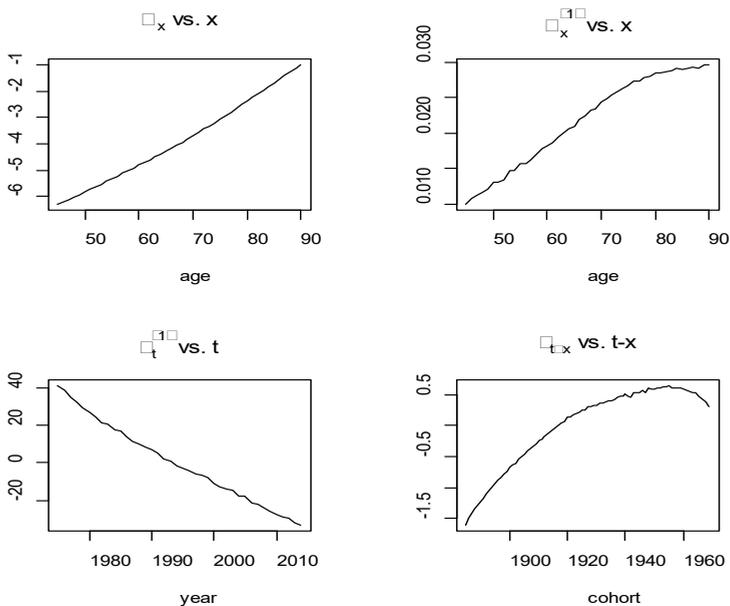


Gráfico 4. Estimación de los parámetros del modelo Renshaw-Haberman



A continuación mostramos los gráficos de dispersión de los residuos *scaled deviance* para ambos modelos según edad, años de calendario y año de nacimiento. Como puede apreciarse en el caso del modelo Lee-Carter (Gráfico 5), los residuos muestran algún tipo de patrón de comportamiento

en relación al año de calendario y, especialmente, al año de nacimiento. En cambio, en el caso del modelo Renshaw-Haberman, no se aprecia ningún patrón de comportamiento en ninguno de los gráficos (Gráfico 6).

Gráfico 5. Residuos *scaled deviance* del modelo Lee-Carter

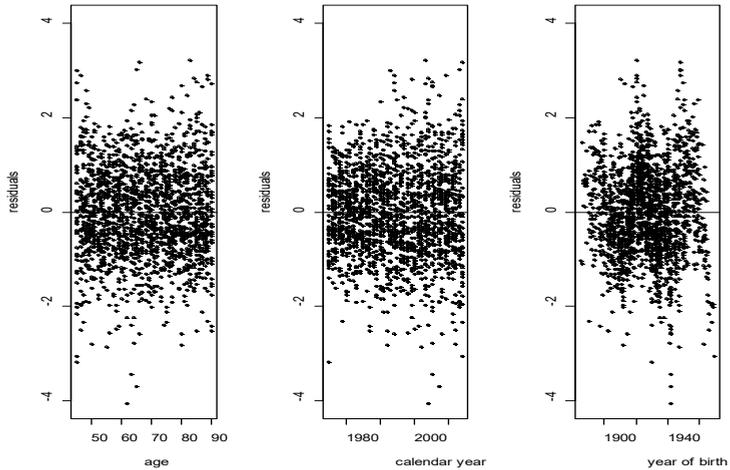
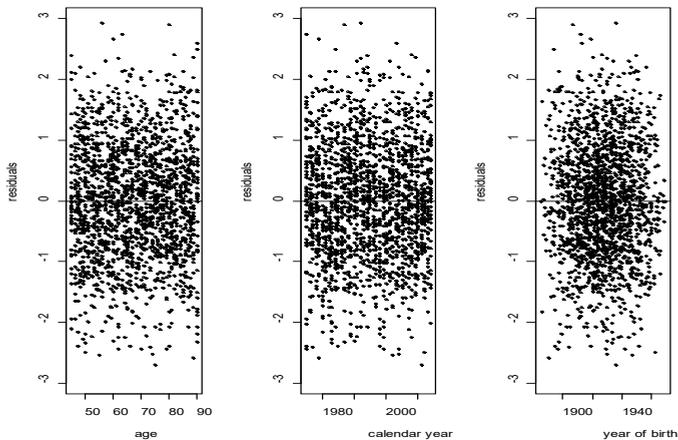


Gráfico 6. Residuos *scaled deviance* del modelo Renshaw-Haberman



En base al análisis de los residuos, aparentemente, el modelo de Renshaw-Haberman presentaría un mejor ajuste. Este resultado es en cierto modo

esperable puesto que este modelo generaliza al de Lee-Carter incluyendo más parámetros. Por tanto, necesitamos alguna medida que tenga en cuenta el número de parámetros utilizados por el modelo. Si comparamos ambos modelos mediante el criterio de información de Akaike (AIC) o el criterio de información bayesiano (BIC), en ambos casos se prefiere el modelo de Renshaw-Haberman (Modelo L-C: 22.044,87(AIC) y 22.762,15(BIC); Modelo R-H: 20.415,46 (AIC); 21.596,21 (BIC)).

Por último, en los Gráficos 7 y 8 mostramos las predicciones de los índices para el periodo 2015-2045 del modelo Lee-Carter y del modelo Renshaw-Haberman, respectivamente. El área sombreada refleja el intervalo de confianza al 95% de las predicciones.

Gráfico 7. Predicción del índice temporal en el modelo Lee-Carter

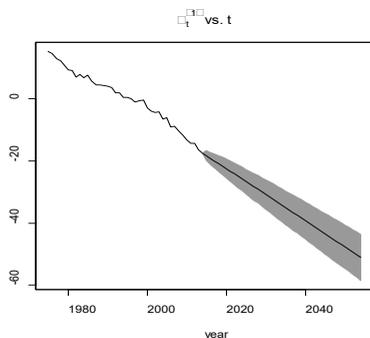
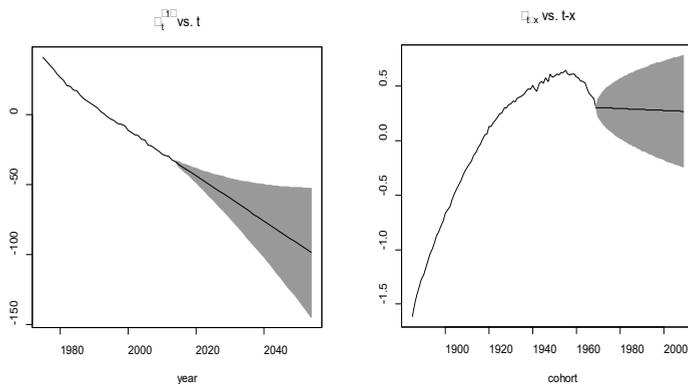


Gráfico 8. Predicción de los índices en el modelo Renshaw-Haberman



5. Comparación de escenarios

5.1 Tablas de mortalidad en el ramo de vida

Las tablas que se utilizan en España en el ramo de vida son, principalmente, las PASEM 2010 y la PERM/F-2000. Para el cálculo de la prima en el ámbito de los seguros de vida con riesgo de fallecimiento, en España hasta el año 2010, se estuvieron utilizando las tablas suizas GKMF 95. A partir de dicha fecha se utilizan las tablas específicas para la población asegurada española denominadas PASEM 2010, elaboradas por ICEA junto a Munich Re. En cuanto al riesgo de supervivencia, principalmente se utilizan las tablas generacionales españolas de supervivencia denominadas PERM/F-2000P. Estas tablas son dinámicas, en el sentido que las probabilidades de fallecimiento deben ajustarse según el año de calendario considerado. Estas tablas se compararán con las tablas de mortalidad-supervivencia obtenidas el modelo Lee-Carter y el modelo Renshaw-Haberman.

En las Tablas 1 y 2 se comparan el conjunto de tablas de mortalidad-supervivencia para los dos escenarios. En todas ellas se muestra q_x , es decir, la probabilidad de que un individuo con edad x fallezca antes de cumplir la edad $x+1$. Para la creación de las tablas basadas en el modelo Lee-Carter y Renshaw-haberman es necesario predecir el tanto central de mortalidad, por lo que las tablas dependerán de la edad del individuo, el género, el año de calendario y, en el caso de las tablas estimadas mediante el modelo Renshaw-Haberman, también la cohorte. Para obtener q_x a partir del tanto central de mortalidad, establecemos la siguiente relación¹ $q_x = 1 - \exp(-m_x)$.

La Tabla 1 incluye las tablas de mortalidad/supervivencia para un hombre hasta los 90 años que en el año 2015 tiene 65 años (Escenario 1). Cada columna representa una tabla de mortalidad/supervivencia diferente. La segunda columna muestra la tabla de mortalidad ajustada mediante el modelo Lee-Carter (LC). La tercera columna representa la tabla de mortalidad ajustada mediante el modelo Lee-Carter si para la predicción del tanto central de mortalidad se utiliza el límite inferior del intervalo de predicción del índice k_t con un nivel de confianza del 95% (LC-LOW). La cuarta columna muestra la tabla obtenida mediante el modelo Lee-Carter con el límite superior del intervalo de predicción del índice (LC-UP). Las tres

¹ Es decir, el tanto instantáneo de fallecimiento definido como $\mu_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_t q_x}{\Delta t}$, lo aproximamos mediante el tanto central de mortalidad $\mu_x \approx m_x$ y asumimos que es constante en edades no enteras. Para otras aproximaciones véase Ayuso *et al.* (2007).

siguientes columnas muestran la misma información para el caso del modelo de Renshaw-Haberman. En la obtención de las tablas basadas en el límite inferior y superior de las predicciones, cabe recordar que en el modelo de Renshaw-Haberman intervienen dos índices k_t y y_{t-x} . Se ha considerado el intervalo de confianza de predicción al 95% y se han utilizado los límites inferiores (RH-LOW) o superiores (RH-UP) de ambos índices, para la obtención de las tablas de mortalidad-supervivencia. En las dos últimas columnas se muestran la tabla de supervivencia PERM-2000P para un hombre de 65 años en el año 2015 y la tabla de mortalidad PASSEM 2010.

Como se puede apreciar las diferencias más significativas se encuentran en las edades avanzadas, especialmente en aquellos casos por encima de los ochenta años. En general, los valores más bajos se observan en el modelo Renshaw-Haberman. Cabe señalar que las predicciones del modelo Renshaw-Haberman son muy cercanas a las tasas obtenidas en la PERM/F. Las predicciones del modelo Lee-Carter estarían ligeramente por encima de las del modelo de Renshaw-Haberman y de las observadas en las tablas PERM/F, pero muy alejadas de las tablas PASEM. Incluso cuando se considera el límite superior de predicción al 95% en ambos modelos, las tasas obtenidas continúan siendo muy inferiores a las observadas en las tablas PASEM.

La Tabla 2 recoge la misma información que la Tabla 1 pero en este caso es para un hombre que en el año 2015 tiene 50 años (Escenario 2). Como puede apreciarse, el comportamiento es muy similar al observado en la Tabla 1, aunque las diferencias observadas entre los distintos modelos son ahora mayores a las mostradas en la Tabla 1. Cabe señalar que en esta tabla se están realizando proyecciones de mortalidad más alejadas en el tiempo, por lo que parece lógico que se distancien más las predicciones en base a las tendencias captadas por cada uno de los modelos. El modelo de Renshaw-Haberman vuelve a ofrecer los valores más bajos en las predicciones, claramente inferiores a los valores de las PERM/F, especialmente para edades avanzadas. En cambio, las tasas predichas mediante el modelo Lee-Carter estarían por encima de las observadas en las tablas PERM/F. Las diferencias observadas entre los distintos modelos son ahora mayores a las mostradas en la Tabla 1.

Tabla 1. Comparación de tablas de mortalidad-supervivencia para un hombre que en el año 2015 tiene 65 años (Escenario 1)

Edad	LC	LC-LOW	LC-UP	RH	RH-LOW	RH-UP	PERM	PASEM
65	0,012	0,011	0,012	0,012	0,011	0,012	0,010	0,013
66	0,012	0,012	0,013	0,012	0,012	0,013	0,011	0,014
67	0,013	0,012	0,014	0,013	0,012	0,014	0,012	0,016
68	0,014	0,013	0,015	0,014	0,013	0,015	0,013	0,018
69	0,015	0,014	0,016	0,015	0,013	0,016	0,014	0,020
70	0,016	0,015	0,017	0,015	0,014	0,017	0,015	0,022
71	0,017	0,015	0,018	0,016	0,014	0,019	0,016	0,026
72	0,018	0,017	0,020	0,017	0,015	0,020	0,018	0,029
73	0,020	0,018	0,022	0,018	0,015	0,022	0,019	0,034
74	0,022	0,020	0,024	0,020	0,016	0,024	0,021	0,039
75	0,024	0,021	0,026	0,021	0,017	0,027	0,023	0,046
76	0,025	0,023	0,028	0,022	0,017	0,029	0,025	0,053
77	0,029	0,026	0,032	0,024	0,018	0,033	0,027	0,063
78	0,031	0,028	0,035	0,026	0,019	0,036	0,029	0,074
79	0,035	0,031	0,039	0,028	0,020	0,040	0,032	0,087
80	0,038	0,034	0,043	0,030	0,020	0,045	0,034	0,097
81	0,043	0,039	0,048	0,033	0,021	0,050	0,037	0,108
82	0,048	0,043	0,053	0,035	0,022	0,056	0,040	0,121
83	0,054	0,049	0,060	0,039	0,023	0,063	0,043	0,134
84	0,060	0,054	0,066	0,041	0,024	0,070	0,046	0,149
85	0,068	0,062	0,075	0,045	0,026	0,079	0,049	0,166
86	0,077	0,070	0,084	0,049	0,027	0,089	0,054	0,184
87	0,086	0,078	0,093	0,053	0,028	0,100	0,057	0,204
88	0,098	0,091	0,106	0,059	0,030	0,113	0,061	0,225
89	0,107	0,098	0,115	0,062	0,030	0,125	0,066	0,248

Tabla 2. Comparación de tablas de mortalidad-supervivencia para un hombre que en el año 2015 tiene 50 años (Escenario 2)

Edad	LC	LC-LOW	LC-UP	RH	RH-LOW	RH-UP	PERM	PASEM
50	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,004
51	0,004	0,003	0,004	0,003	0,003	0,003	0,003	0,005
52	0,004	0,004	0,004	0,003	0,003	0,004	0,003	0,005
53	0,004	0,004	0,004	0,004	0,003	0,004	0,004	0,006
54	0,005	0,004	0,005	0,004	0,004	0,004	0,004	0,006
55	0,005	0,004	0,005	0,004	0,004	0,004	0,004	0,007
56	0,005	0,005	0,006	0,004	0,004	0,005	0,004	0,007
57	0,005	0,005	0,006	0,004	0,004	0,005	0,005	0,008
58	0,006	0,005	0,006	0,005	0,004	0,005	0,005	0,009
59	0,006	0,006	0,007	0,005	0,004	0,006	0,005	0,009
60	0,007	0,006	0,007	0,005	0,004	0,006	0,006	0,010
61	0,007	0,006	0,008	0,005	0,004	0,006	0,006	0,010
62	0,007	0,007	0,008	0,005	0,004	0,007	0,006	0,011
63	0,008	0,007	0,009	0,006	0,005	0,007	0,007	0,011
64	0,008	0,007	0,009	0,006	0,005	0,008	0,008	0,012
65	0,009	0,008	0,010	0,006	0,005	0,009	0,008	0,013
66	0,009	0,008	0,010	0,006	0,005	0,009	0,009	0,014
67	0,009	0,008	0,011	0,007	0,005	0,010	0,010	0,016
68	0,010	0,009	0,011	0,007	0,005	0,010	0,010	0,018
69	0,011	0,009	0,012	0,007	0,005	0,011	0,011	0,020
70	0,011	0,010	0,013	0,008	0,005	0,012	0,012	0,022
71	0,012	0,010	0,014	0,008	0,005	0,013	0,013	0,026
72	0,013	0,011	0,015	0,008	0,005	0,015	0,014	0,029
73	0,014	0,012	0,017	0,009	0,005	0,016	0,015	0,034
74	0,016	0,014	0,018	0,009	0,005	0,018	0,017	0,039
75	0,017	0,015	0,020	0,010	0,005	0,020	0,018	0,046
76	0,018	0,016	0,022	0,010	0,005	0,021	0,020	0,053
77	0,021	0,018	0,025	0,011	0,005	0,024	0,021	0,063
78	0,023	0,020	0,027	0,012	0,005	0,027	0,023	0,074
79	0,026	0,022	0,030	0,013	0,005	0,030	0,025	0,087
80	0,029	0,025	0,033	0,013	0,005	0,034	0,027	0,097
81	0,033	0,028	0,038	0,015	0,006	0,038	0,030	0,108
82	0,037	0,032	0,042	0,016	0,006	0,043	0,032	0,121
83	0,043	0,037	0,049	0,017	0,006	0,049	0,034	0,134
84	0,047	0,041	0,054	0,018	0,006	0,055	0,036	0,149
85	0,055	0,049	0,062	0,020	0,006	0,063	0,039	0,166
86	0,063	0,056	0,071	0,022	0,007	0,071	0,043	0,184
87	0,070	0,063	0,079	0,023	0,007	0,080	0,046	0,204
88	0,082	0,074	0,091	0,026	0,007	0,092	0,049	0,225
89	0,090	0,081	0,099	0,027	0,007	0,102	0,053	0,248

5.2 Cuantificación de las primas

En este apartado cuantificaremos las primas para los dos escenarios propuestos en la Sección 3. En su cálculo utilizamos las tablas de mortalidad/supervivencia de las Tablas 1 y 2. Las primas obtenidas utilizando las tablas de mortalidad-supervivencia basadas en los modelos Lee-Carter y Renshaw-Haberman se compararán con las obtenidas con las tablas PASEM-2010 y PERM-2000P teniendo en cuenta que, en el caso de seguros de vida, se utilizarán las tablas PASEM-2010 (riesgo de fallecimiento) y, en el caso del cálculo del valor actual actuarial de rentas temporales, se utilizarán las tablas PERM-2000P (riesgo de longevidad).

Para la obtención del valor actual actuarial en el seguro de vida pagadero al final del año de fallecimiento (VAA_S) se utiliza la siguiente fórmula,

$$VAA_S = \sum_{j=0}^{d-1} C \cdot (1 + I)^{-(1+j)} \cdot {}_j p_x \cdot q_{x+j}$$

donde C es la cuantía a pagar en caso de fallecimiento, d la temporalidad expresada en años, I el tipo de interés efectivo anual, ${}_j p_x$ la probabilidad temporal de supervivencia de un individuo de edad x que llegue vivo a la edad $x+j$, y q_{x+j} la probabilidad anual de fallecimiento de un individuo de edad $x+j$ (Dickson *et al.*, 2009).

Para la obtención del valor actual actuarial en la renta temporal diferida (VAA_R) se utiliza la siguiente fórmula,

$$VAA_R = \sum_{j=1}^d C \cdot (1 + I)^{-(j+m)} \cdot {}_{j+m} p_x$$

donde C es la cuantía a pagar en caso de supervivencia, m el diferimiento (con valor cero en caso de no tener), d es la temporalidad expresada en años y ${}_{j+m} p_x$ la probabilidad que un individuo de edad x llegue vivo a la edad $x+j+m$.

En el primer escenario calculamos el valor actual actuarial de un seguro de vida con capital asegurado de 60.000 euros y una renta temporal de 5.000 euros hasta los 90 años para un hombre con 65 años. El segundo escenario consiste en calcular el valor actual actuarial de un seguro de vida de

temporalidad 15 años con capital asegurado de 100.00 euros y el de una renta anual de 12.000 euros con temporalidad 25 años y diferimiento de 14 años. En ambos escenarios el tipo de interés es $I=0,015$. En la Tabla 3 se muestra el valor actual actuarial para los dos escenarios.

Como se puede apreciar en la Tabla 3, en el caso del seguro de vida, en ambos escenarios el valor actual actuarial es significativamente más elevado que el resto cuando se calcula utilizando las tablas PASEM-2010. El valor obtenido con las PASEM-2010 es incluso superior a cuando utilizamos las tablas de mortalidad/supervivencia de Lee-Carter y Renshaw-Haberman con los límites superiores.

Si comparamos entre los resultados obtenidos aplicando las tablas derivadas del modelo Lee-Carter con las tablas obtenidas a partir del modelo Renshaw Haberman a partir de la predicción puntual del tanto central de mortalidad, el valor actual actuarial obtenido con Renshaw-Haberman es claramente inferior al de Lee-Carter. Si consideramos el intervalo de confianza al 95%, la amplitud del intervalo del modelo Renshaw-Haberman es mayor a la observada en el modelo Lee-Carter. Cabe recordar que el intervalo de predicción en el primer caso depende de dos índices y, en el segundo, únicamente de uno. En el primer escenario, si comparamos el valor actual actuarial de los dos modelos, el valor actual actuarial inferior es el obtenido con RH-LOW y, al mismo tiempo, el valor actual actuarial superior es el obtenido con RH-UP. En el segundo escenario, todos los valores obtenidos con Lee-Carter son superiores a los obtenidos con Renshaw-Haberman.

Tabla 3. Valor actual actuarial de los seguros de vida y rentas temporales en los dos escenarios considerando las distintas tablas de mortalidad/supervivencia

	LC	LC-LOW	LC-UP	RH	RH-LOW	RH-UP	PASEM- PERM*
<i>Escenario 1</i>							
VAA _s	29.539	27.869	31.223	24.319	18.015	32.076	42.811
VAA _r	78.130	81.279	78.013	82.587	86.684	77.405	81.820
VAA _s + VAA _r	107.669	109.149	109.236	106.906	104.699	109.481	124.631
<i>Escenario 2</i>							
VAA _s	7.019	6.525	7.552	5.667	4.993	6.467	9.908
VAA _r	157.905	162.613	152.820	174.865	185.733	155.878	161.213
VAA _s + VAA _r	164.924	169.137	160.372	180.532	190.726	162.344	171.121

* Las tablas PASEM 2010 se utilizan en el cálculo de la prima del seguro de vida.

Las tablas PERM/F se utilizan en el cálculo de la prima de la renta anual temporal.

El patrón de comportamiento es claramente diferenciado cuando analizamos el valor actual actuarial de las rentas temporales. Como se observa en la Tabla 3, para ambos escenarios el valor actual actuarial obtenido con las tablas PERM-2000 es inferior al obtenido con las predicciones puntuales basadas en el modelo de Renshaw-Haberman. La diferencia es especialmente significativa en el segundo escenario. Es decir, en el escenario que implica proyecciones del tanto central de mortalidad más alejadas en el tiempo.

Cuando se compara el valor actual actuarial basado en la tabla PERM-2000 con el obtenido según la predicción puntual del modelo Lee-Carter, el primero es superior al segundo en ambos escenarios. En sí, el valor actual actuarial de la PERM-2000 estaría próximo al obtenido con el LC-LOW, es decir, al obtenido con el límite inferior de las predicciones del tanto central de mortalidad al 95%.

6. Conclusiones

El objetivo del estudio es reflexionar sobre la importancia de una correcta modelización del riesgo de fallecimiento y supervivencia por parte de las compañías aseguradoras. En este artículo se plantean dos escenarios de cuantificación del valor actual actuarial en seguros de vida y en rentas temporales mediante las tablas normalmente utilizadas en el sector y comparar dichos resultados con los obtenidos aplicando las tablas de mortalidad/supervivencia derivadas del modelo Lee-Carter y el modelo Renshaw-Haberman.

Una primera conclusión es que las tablas PASEM 2010 parecen adecuadas para garantizar la solvencia de las entidades aseguradoras en cuanto a posibles desviaciones en el riesgo de fallecimiento. En efecto, las tasas de mortalidad de las tablas PASEM 2010 parecen suficientemente conservadoras en comparación a los valores estimados mediante los modelos Lee-Carter y Renshaw-Haberman. En consecuencia, las primas estimadas mediante estas tablas parecerían suficientes para cubrir el coste esperado derivado del riesgo de fallecimiento, así como posibles desviaciones derivadas de un peor comportamiento al esperado del riesgo de fallecimiento.

Una segunda conclusión es que, en cambio, el riesgo de longevidad parecería no quedar completamente cubierto con la utilización de las tasas brutas de las tablas PERM-F 2000P. En este sentido, parecería aconsejable aplicar

recargos de seguridad a las tasas brutas de las PERM-F 2000P para cubrir posibles desviaciones derivadas de una mayor longevidad de los individuos a la esperada mediante la aplicación de dichas tablas, especialmente cuanto más alejadas en el tiempo sean las proyecciones de las tasas de supervivencia.

Cabe remarcar que las tablas de mortalidad/supervivencia derivadas de los modelos Lee-Carter y Renshaw-Haberman han sido estimadas a partir del comportamiento de la mortalidad de la población en general. Está ampliamente aceptado que las tasas de mortalidad de las carteras de asegurados en el ramo de vida suelen mostrar unos menores valores a los observados en la población no asegurada. En este sentido, las tasas estimadas de mortalidad mediante los modelos Lee-Carter y Renshaw-Haberman probablemente serían menores si se hubieran estimado para la cartera de asegurados de una compañía aseguradora. No obstante, también puede suceder que el comportamiento de la mortalidad asegurada sea peor al de la población en general debido al efecto de selección adversa (Mitchell *et al.*, 1999; McCarthy y Mitchell, 2010).

Independientemente que las compañías tengan que utilizar unas determinadas tablas de mortalidad/supervivencia para la tarificación en sus productos aseguradores en el ramo de vida, o que no puedan discriminar en el precio según determinadas características de los asegurados, pensamos que es muy importante que dediquen esfuerzos a modelizar adecuadamente el comportamiento de la mortalidad de sus carteras de asegurados.

Una correcta modelización de la mortalidad de la cartera de asegurados le permitirá a la compañía aseguradora, entre otros aspectos, calcular las provisiones para cubrir posibles desviaciones de la mortalidad/supervivencia fijando el nivel de riesgo que quieren asumir.

No menos importante es la posibilidad de una gestión dinámica de la cartera de asegurados. El hecho que la compañía conozca el comportamiento de la mortalidad de su cartera de asegurados, le permite estimar la rentabilidad esperada de los asegurados, así como posibles desviaciones a dicha rentabilidad, cuando se aplican unas tablas de mortalidad determinadas. Esta información debería ser muy relevante en la estrategia de negocio de la compañía, puesto que le ayuda en la toma de decisiones sobre qué productos aseguradores deben incentivarse dentro de la compañía en base a la dicotomía rentabilidad-riesgo de los distintos colectivos de asegurados.

Este artículo pretende contribuir en la discusión sobre la importancia de modelizar adecuadamente la mortalidad y longevidad mediante un ejercicio práctico de cálculo del valor actual actuarial en diferentes escenarios y asumiendo diferentes hipótesis. Obviamente el trabajo no está exento de importantes limitaciones. Una primera limitación es que sólo se han utilizado dos modelos en la modelización de la mortalidad. En la literatura se han propuesto muchos modelos del comportamiento de la mortalidad. Por lo tanto, sería recomendable realizar una comparación más amplia de modelos en la modelización de la mortalidad.

En relación a lo anterior, dentro de los modelos Lee-Carter y Renshaw-Haberman que han sido aplicados en este artículo, se asumen un conjunto de hipótesis que no han sido suficientemente contrastadas. En primer lugar, el periodo temporal considerado no tiene porqué ser el más adecuado para modelizar la mortalidad de la población española, como tampoco la franja de edades seleccionada. Por último, y quizás más relevante por su incidencia en las tablas estimadas, debería comprobarse que los procesos estocásticos seleccionados para los índices en las predicciones son los más adecuados, así como incorporar el error de estimación de los parámetros dentro del error de predicción y no únicamente la variabilidad del proceso. En conclusión, se debería realizar un análisis más exhaustivo de todos estos elementos antes de llevarlo a la práctica por las compañías aseguradoras en el cálculo de las provisiones y rentabilidad/riesgo de los asegurados de su cartera.

Referencias

- Ayuso, M., Corrales, H., Guillen, M., Pérez-Marín, A. M. y J. L. Rojo (2007). *Estadística Actuarial Vida*, Ediciones UB, Barcelona.
- Betzuen, A. (2010). Un análisis sobre las posibilidades de predicción de la mortalidad futura aplicando el modelo Lee-Carter. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles* 16, 111-140.
- Brouhns, N., Denuit, M. y J. K. Vermut (2002). A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected life-tables. *Insurance: Mathematics and Economics* 31, 373-393.
- Cairns A., Blake, D. y K. Dowd (2006). A Two-Factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration. *Journal of Risk and Insurance* 73(4), 687-718.

- Carter, L. R. y R.D. Lee (1992). Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association* 87(419), 659-671.
- Danesi, I. L., Haberman, S. y P. Millosovich (2015). Forecasting mortality in subpopulations using Lee–Carter type models: A comparison. *Insurance: Mathematics and Economics* 62, 151–161.
- Debón, A. M., Martínez, F., Montes, F. y M. Moshuk (2015). Proyección de los indicadores de mortalidad para España. *Estadística Española* 57(188), 291-321.
- Dickson, D., Hardy, M. y H. Waters (2009). *Actuarial mathematics for life contingent risks*, Cambridge University Press.
- Haberman S. y A. Renshaw (2011). A comparative study of parametric mortality projection models. *Insurance: Mathematics and Economics* 48(1), 35–55.
- INE (2018a). *Indicadores de Mortalidad: Esperanza de Vida al Nacimiento según sexo*. Instituto Nacional de Estadística (consulta realizada el 15 de octubre de 2018).
- INE (2018b). *Hipótesis nacionales de evolución demográfica 2016-2065, Tablas de Mortalidad proyectadas 2016-2065: Esperanza de Vida por edad y sexo*. Instituto Nacional de Estadística (consulta realizada el 15 de octubre de 2018).
- Lee, R. D. (2000). The Lee-Carter method of forecasting mortality, with various extensions and applications (with discussion). *North American Actuarial Journal* 4, 80-93.
- Lee, R.D. y F. Nault (1993). Modeling and forecasting provincial mortality in Canada. *The World Congress of the International Union for the Scientific Study of Population*, Montreal.
- Lee, R. D. y R. Rofman (1994). Modelación y proyección de la mortalidad en Chile. *Notas* 22 (59), 182-213.
- Li, N., Lee, R. y S. Tuljapurkar (2004). Using the Lee–Carter Method to forecast mortality for populations with limited data. *International Statistical Review* 72 (1), 19–36.

- Lundström, H. y J. Qvist (2002). Mortality forecasting and trend shifts: an application of the Lee-Carter Model to Swedish mortality data. *International Statistical Review* 72(1), 37-50.
- McCarthy, D. y O. Mitchell (2010). International adverse selection in life insurance and annuities. En Tuljapurkar, S., Ogawa, N. y A. Gauthier (eds.) *Ageing in advanced industrial states. International studies in population*, 8, Springer, Dordrecht.
- Mitchell, O., Poterba, J., Warshawsky, M. y J. Brown (1999). New evidence on the money's worth of individual annuities. *The American Economic Review* 89(5), 1299-1318.
- Plat, R. (2009). On stochastic mortality modeling. *Insurance: Mathematics and Economics* 45(3), 393-404.
- Renshaw, A. E. y S. Haberman (2006). A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics* 38(3), 556-570.
- Tuljapurkar, S., Nan, L. y B. Carl (2000). A universal pattern of mortality declines in the G7 countries. *Nature* 405, 789-792.
- Villegas, A., Millossovich, P. y V. Kaishev (2017). StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modeling. *Journal of Statistical Software*, preprint.
- Wilmoth, J. R. (1993). Computational methods for fitting and extrapolating the Lee-Carter Model of mortality change. *Technical Report*, University of California, Berkeley, USA.
- Wilmoth, J. R. (1996) Mortality projections for Japan: a comparison of four methods. En Caselli, G. y A. López (eds.) *Health and mortality among elderly populations*, Oxford University Press, New York, 266-287.