

CONSTRUCCIÓN DE PORTAFOLIOS CONSIDERANDO MOMENTOS SUPERIORES PARA FONDOS DE INVERSIÓN

CONSTRUCTION OF PORTFOLIOS CONSIDERING HIGHER MOMENTS FOR INVESTMENT FUNDS

Genjis A. Ossa González

Universidad Popular del Cesar. Aguachica, Colombia.
Grupo de Investigación ECONFI
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8194-0859>
gaossag@unadvirtual.edu.co
(Autor para correspondencia)

Miriam Rojas Dominguez

Universidad Popular del Cesar. Aguachica, Colombia.
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5839-0086>

Fecha de recepción: 23 julio 2023

Fecha de aceptación: 18 diciembre 2023

RESUMEN

El objetivo de este estudio es construir un portafolio utilizando Momentos Superiores y considerando activos tipo ETF. Se emplea una metodología cuantitativa que no solo se basa en la normalidad de la utilidad esperada, sino también en la inclusión de momentos superiores. El objetivo final es optimizar la utilidad de cada portafolio y determinar los tres mejores. Al analizar los rendimientos de la cartera compuesta por los activos LABU, PSQ, FXI, SPY e IWM, se observó una disminución en los rendimientos tanto en términos absolutos como porcentuales al considerar momentos superiores. Bajo condiciones de normalidad, la mayoría de los activos registraron rendimientos negativos, y esta tendencia se intensificó al incluir momentos superiores. En relación a los portafolios, se encontró que el Portafolio 2 mostró un desempeño destacado en términos de utilidad bajo la suposición de normalidad. A pesar de tener una curtosis notablemente más alta que los demás portafolios, este portafolio exhibió una media positiva más alta y una volatilidad más baja. Sin embargo, al considerar la ecuación de momentos superiores, se reveló que ninguno de los portafolios era viable como opción de inversión, lo que indica un mayor riesgo en todos ellos.

Palabras clave: Retorno, Asimetría, Curtosis, Optimización de cartera.

ABSTRACT

The objective of this study is to build a portfolio using Higher Moments and considering ETF-type assets. A quantitative methodology is used that is not only based on the normality of the expected utility, but also on the inclusion of higher moments. The ultimate goal is to optimize the utility of each portfolio and determine the top three. When analyzing the returns of the portfolio made up of the LABU, PSQ, FXI, SPY and IWM assets, a decrease in returns was observed both in absolute and percentage terms when considering higher moments. Under normal conditions, most assets posted negative returns, and this trend intensified when



including higher moments. Regarding the portfolios, it was found that Portfolio 2 showed an outstanding performance in terms of utility under the assumption of normality. Despite having significantly higher kurtosis than the other portfolios, this portfolio exhibited a higher positive mean and lower volatility. However, when considering the higher moments equation, it was revealed that none of the portfolios was viable as an investment option, indicating a higher risk in all of them.

Keywords: Return, Asymmetry, Kurtosis, Portfolio Optimization.

1. INTRODUCCIÓN/INTRODUCTION

En el contexto actuarial, la gestión de riesgos y la toma de decisiones fundamentadas desempeñan un papel fundamental en la preservación de la solvencia y la estabilidad financiera a largo plazo. Este imperativo se hace aún más evidente cuando se trata de la inversión en fondos de inversión, particularmente en aquellos fondos que exhiben una marcada heterogeneidad y propiedades estadísticas poco convencionales, como han señalado (Bergh y Rensburg, 2008). Sin embargo, las estrategias tradicionales que se basan exclusivamente en indicadores como la media y la varianza pueden resultar insuficientes en el contexto de un enfoque actuarial completo.

Históricamente, la teoría financiera ha confiado en la media varianza de Markowitz (1952) para medir el rendimiento y el riesgo de activos financieros y carteras de inversión. El Capital Asset Pricing Model (CAPM) y la teoría de la cartera de Markowitz, por ejemplo, se basan en estas dos medidas, que, tienen limitaciones notables. En primer lugar, es importante señalar que la suposición de una distribución normal de los rendimientos, adoptada al calcular la media y la varianza, podría representar una simplificación poco realista de la compleja dinámica financiera (Molina, 2022). En la práctica, los mercados financieros a menudo exhiben asimetrías y colas gruesas en sus distribuciones, indicando que los eventos extremos, tanto positivos como negativos, son más probables de lo que se prevería utilizando una distribución normal.

En segundo lugar, la varianza, al no diferenciar entre los riesgos positivos (ganancias más de lo esperado) y negativos (pérdidas más grandes de lo esperado), puede llevar a decisiones subóptimas. Los inversores y gestores de fondos pueden estar dispuestos a asumir ciertos riesgos positivos mientras buscan minimizar los riesgos negativos.

Los momentos superiores, como el sesgo y la curtosis, abordan estas limitaciones al proporcionar una representación más completa de la distribución de rendimientos. El sesgo informa sobre la asimetría de la distribución, lo que permite a los inversores evaluar la probabilidad de eventos extremos (Dahlquist *et al.*, (2017). La curtosis, por otro lado, destaca la concentración de los rendimientos, lo que es crucial para la gestión del riesgo de cola (Arditti, 1967; Xu *et al.* 2019).

Este artículo tiene como objetivo principal introducir la aplicabilidad de los momentos superiores en la construcción de portafolios para fondos de inversión. En la literatura financiera, se ha documentado que los momentos superiores, que incluyen el sesgo (skewness) y la curtosis (kurtosis), aportan una comprensión más completa de la naturaleza de los rendimientos financieros y son fundamentales para tomar decisiones de inversión informadas (Harvey *et al.*, 2010; Steyn y Theart, 2021).

Investigadores Konno *et al.*, (1993) han proporcionado evidencia empírica para demostrar que los rendimientos de los valores y las carteras no se distribuyen normalmente y han discutido que la asimetría de los rendimientos de los activos juega un papel importante en la elección de una cartera óptima. Según la discusión mencionada anteriormente, una extensión natural del modelo general de media-varianza es considerar la asimetría del rendimiento de una cartera en el problema de selección de cartera que la consideración de los momentos superiores en la construcción de portafolios puede mejorar la capacidad de los inversores para gestionar el riesgo y aprovechar las oportunidades de rendimiento.

En este contexto, este artículo se sumerge en la aplicación práctica de los momentos superiores en la construcción de portafolios de fondos de inversión, proporcionando una perspectiva más sólida y efectiva para la toma de decisiones financieras. El contenido restante de este documento se organiza de la siguiente manera: en la sección 2, se presenta una revisión de la literatura relevante; en la sección 3, se expone la metodología y los datos utilizados, proporcionando una descripción concisa de cómo se obtuvieron los parámetros; en la sección 4, se presentan los principales resultados obtenidos tanto para; finalmente, en la sección 5, concluye este estudio.

2. REVISIÓN DE LITERATURA

El problema de la cartera de varianza media propuesto por Markowitz (1952) ha sido ampliamente utilizado en la construcción de carteras eficientes. Sin embargo, este enfoque tradicional asume que los rendimientos de los activos financieros siguen una distribución normal y considera los parámetros de entrada como deterministas. Sin embargo, la literatura ha demostrado que los retornos de los activos financieros están influenciados por distribuciones de cola gorda y asimétricas en lugar de seguir una distribución normal.

Varios estudios han investigado la relación entre la volatilidad y la asimetría en los mercados financieros, respaldando la idea de que los rendimientos no siguen una distribución normal. Por ejemplo, Mandelbrot (1963) fue el primero en proponer un nuevo enfoque para el análisis de datos económicos basado en el uso de momentos superiores de las distribuciones de probabilidad. Aplicando este enfoque al análisis de los precios de las acciones, Mandelbrot (1963) encontró que los rendimientos de las acciones no se ajustan a una distribución normal, como tradicionalmente se supone en el análisis económico convencional.

El autor Fama (1965) quien es conocido por su contribución en la construcción de portafolios utilizó un enfoque gráfico para examinar la distribución de los rendimientos de las acciones y encontró que estos muestran una curtosis positiva y una asimetría negativa. Por su parte, Peiro (1999) empleó un enfoque estadístico para examinar la asimetría en los rendimientos financieros y descubrió que estos tienden a ser asimétricos, es decir, tienen una mayor probabilidad de generar rendimientos negativos en comparación con los rendimientos positivos.

Estudios más actuales como los de Brito *et al.*, (2019) propone un modelo biobjetivo que permite a los inversores analizar la relación entre la utilidad esperada y la cantidad de activos en sus carteras. Este modelo se aplicó a datos del índice bursátil portugués PSI20. Los resultados mostraron que, en la muestra de datos, la certidumbre equivalente y la ratio de Sharpe aumentaron a medida que se incrementó el número de activos en las carteras. Sin embargo, al considerar momentos superiores, no se observaron mejoras significativas en la certidumbre equivalente en la muestra. En cambio, fuera de la muestra, se observó un aumento en el volumen de operaciones hasta cierto nivel de cantidad de activos, seguido de una disminución. Además, en ciertos niveles de cantidad de activos, se observaron mejoras en la certidumbre equivalente y la ratio de Sharpe, especialmente al considerar la asimetría y la curtosis.

Por su parte los autores Gong *et al.*, (2021) presenta un modelo de selección de carteras que aborda la racionalidad limitada y considera momentos superiores y la eficiencia cruzada DEA. Inicialmente, se propone un modelo de evaluación de eficiencia cruzada basado en el arrepentimiento (RCE) que utiliza diversas métricas financieras esenciales para evaluar la eficiencia de activos. Luego, se integra la eficiencia cruzada en un marco de media-varianza-asimetría para desarrollar un modelo de selección de carteras multiobjetivo basado en la teoría del arrepentimiento. Este modelo busca maximizar la utilidad percibida por el inversor, considerando cuatro objetivos: media, varianza, asimetría y eficiencia, sujeto a restricciones realistas. Además, se tiene en cuenta la incertidumbre de los datos, y los criterios relacionados con la evaluación de la eficiencia cruzada y las rentabilidades de los activos se tratan como variables fuzzy.

Otros estudios como los de Harvey y Siddique (1999); Premaratne y Bera (2000); Lai (1991); Aksarayli y Pala (2018), Levy y Arditti (1975), Jean (1971), y Saranya y Prasanna (2014) son algunos de los investigadores que han contribuido a este campo. Sus estudios han destacado la presencia de movimientos extremos en los precios de los activos, la necesidad de considerar distribuciones de rendimientos no normales y la importancia de la asimetría en la modelización de carteras eficientes.

3. SELECCIÓN DE DATOS Y METODOLOGÍA

Para desarrollar la Construcción de Portafolios Considerando Momentos Superiores para Fondos de Inversión, se crea una base de datos longitudinales para cada una de las muestras, que incluye los precios de cierre de 5 ETFs con mayores rendimientos para la fecha correspondiente de descarga. La selección de los datos se realizó descargando la información correspondiente el 16 de febrero de 2023 desde la base de datos de Yahoo Finance. Se recopilaron un total de 1259 datos por ETF, que abarcan desde el 23 de abril de 2018 hasta el 20 de abril de 2023.

Tabla 1.

Fondos cotizados de inversión.

Exchange Traded Funds	Nemo
Direxion Daily S&P Biotech Bull 3X Shares	LABU
ProShares Short QQQ	PSQ
iShares China Large-Cap ETF	FXI
SPDR S&P 500 ETF Trust	SPY
iShares Russell 2000 ETF	IWM

Fuente: Elaboración propia.

3.1. Descripción ETF

Direxion Daily S&P Biotech Bull 3X Shares (LABU) es un ETF apalancado que tiene como objetivo alcanzar un rendimiento tres veces superior al índice S&P Biotech Select Industry Index, que aglutina a empresas estadounidenses de biotecnología de gran capitalización (Vilella, 2020). LABU utiliza instrumentos financieros derivados para amplificar sus ganancias, aunque esto conlleva un riesgo significativo de pérdidas considerables.

En contraste, ProShares Short QQQ (PSQ) es un ETF inverso diseñado para generar rendimientos opuestos a los movimientos del índice Nasdaq 100, compuesto por las 100 principales empresas no financieras cotizadas en el Nasdaq (Charupat y Miu, 2013). PSQ se emplea para aprovechar las caídas en los precios de las acciones del Nasdaq 100, lo que lo convierte en una herramienta adecuada tanto para la cobertura de riesgos en períodos de declive del mercado como para buscar ganancias especulativas.

iShares China Large-Cap ETF (FXI) se centra en las principales empresas chinas que cotizan en los mercados de Hong Kong y Estados Unidos (Zhu *et al.*, 2019). FXI es un fondo de gran capitalización que invierte en empresas establecidas y de gran envergadura. Este ETF proporciona a los inversores una vía para participar en el mercado bursátil chino, que ha experimentado un crecimiento significativo en los últimos años.

SPDR S&P 500 ETF Trust (SPY) replica el desempeño del índice S&P 500, que abarca a las 500 empresas más grandes de Estados Unidos cotizadas en bolsa. SPY es un ETF de gran capitalización y amplio mercado que brinda una exposición diversificada a la economía estadounidense. Es ampliamente reconocido como uno de los ETFs más populares a nivel mundial y constituye una opción atractiva para los inversores interesados en acceder al mercado bursátil estadounidense (TYVA, 2023).

Finalmente, iShares Russell 2000 ETF (IWM) sigue el rendimiento del índice Russell 2000, compuesto por las 2000 empresas estadounidenses de menor tamaño que cotizan en bolsa. De acuerdo con BlackRock (2023), IWM es un ETF de pequeña capitalización que invierte en empresas emergentes y de menor tamaño. Este fondo puede ser una valiosa alternativa para

los inversores que buscan participar en el mercado bursátil estadounidense de pequeña capitalización, el cual históricamente ha experimentado un crecimiento más rápido que el mercado de gran capitalización (Sweta, 2023).

3.2. Descripción matemática

En primer lugar, se calcula el rendimiento diario del activo. Se utiliza $n = 1258$ para indicar que se están considerando 1258 días de datos históricos del activo para calcular el rendimiento diario.

$$R_{tn} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \quad n = 1258 \quad (1)$$

En segundo lugar, se calcula el rendimiento promedio del activo \bar{R} sumando todos los rendimientos diarios $\sum_{t=2}^{n=1258} R_{tn}$ desde la primera variación hasta el día n , y luego dividiendo esta suma por el número total de días.

$$\bar{R} = \frac{\sum_{t=2}^{n=1258} R_{tn}}{1258} \quad (2)$$

Una vez que tengas el rendimiento promedio \bar{R} , puedes proceder a anualizar los retornos $\bar{R}_l = (1 + \bar{R})^{252} - 1$ donde \bar{R}_l es el rendimiento promedio anualizado y el 252 es el número de días de negociación en un año.

De forma posterior se comprueba el log normalidad de los retornos con la prueba de Kolmogorov-Smirnov utiliza el estadístico D para comparar la función de distribución acumulativa empírica $f_1(x)$, que representa los datos observados, con la función de distribución acumulativa teórica o de referencia $f_2(x)$.

$$D = \max_x |f_1(x) - f_2(x)| \quad (3)$$

Esta prueba calcula la máxima diferencia absoluta entre ambas funciones, lo que permite evaluar la similitud o discrepancia entre las distribuciones y determinar si los datos siguen una distribución específica.

En siguiente lugar se suman las diferencias al cuadrado entre los precios del activo P_t y el rendimiento promedio \bar{P}_t , para cada día desde la primera variación hasta el día n . Luego, se divide esta suma por el número de grados de libertad $(n - 1)$ y se toma la raíz cuadrada para obtener la volatilidad en el tiempo. Al igual que con los retornos promedios \bar{R}_l , la volatilidad σ debe ser anualizada σ_l multiplicándola por la raíz cuadrada $\sigma_l = \sqrt{252}$ del número de períodos en un año.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{n=1258} (P_t - \bar{P}_t)^2}{n-1}} \quad (4)$$

Luego, se procedió al cálculo del coeficiente de asimetría de la siguiente manera: en primer lugar, se restó el valor promedio de cada observación a sus respectivos valores individuales para obtener las desviaciones individuales. Posteriormente, estas desviaciones se estandarizaron dividiéndolas por la desviación estándar. A continuación, se elevaron al cubo estas desviaciones estandarizadas. Luego, se sumaron todos los resultados obtenidos para todas las observaciones. Finalmente, se dividió esta suma entre el número total de observaciones para obtener el coeficiente de asimetría.

$$A_s = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{t=2}^{n=1258} \left[\frac{R_{tn} - \bar{R}}{s} \right]^3 \quad (5)$$

Si el coeficiente A_s es positivo, indica una asimetría positiva o una cola larga en el lado derecho de la distribución. Si por el contrario A_s es negativo, indica una asimetría negativa o una cola larga en el lado izquierdo de la distribución.

$$K = \left\{ \frac{n(n+1)}{(n+1)(n-2)(n-3)} \sum_{t=2}^{n=1258} \left(\frac{R_{tn} - \bar{R}}{s} \right)^4 \right\} - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \quad (6)$$

La curtosis de una distribución describe la concentración de los valores alrededor de la media y puede ser positiva o negativa. Donde \bar{R} es la media, s es la desviación estándar y n es el número de puntos de datos en la muestra, el valor de la curtosis de una distribución normal es tres.

Cuando la curtosis es negativa, la cola de la distribución es más corta que la de una distribución normal, lo que indica una menor probabilidad de valores atípicos, tanto positivos como negativos. En términos de inversiones, una curtosis positiva sugiere que un activo tiene un mayor potencial de rendimiento, pero también un mayor riesgo de pérdidas. Por otro lado, una curtosis negativa indica que un activo tiene un menor potencial de rendimiento, pero también un menor riesgo de pérdidas (Salinas *et al.*, 2010).

Acercándose a los momentos, en primera instancia se halla la fórmula de utilidad esperada para un primer momento, el cual permite cuantificar la preferencia de un inversor por asumir riesgos y ajustar el rendimiento esperado en función de su nivel de aversión al riesgo y la volatilidad del activo.

$$U_1 = \bar{R}_t - \frac{\theta\sigma^2}{2} \quad (7)$$

Sin embargo, la suposición anterior, que se basa únicamente en la normalidad y la media-varianza, simplifica la función de utilidad a la media anualizada menos θ por la varianza σ^2 dividida por 2. Esta función de utilidad resulta insuficiente, ya que no todos los inversores se ajustan a una distribución simétrica y con colas ligeras en la realidad.

$$U_2 = \bar{R}_t - \frac{\theta\sigma^2}{2} + \frac{\theta^2\sigma^3S}{6} - \frac{\theta^3\sigma^4(K-3)}{720} \quad (8)$$

Donde de acuerdo con Pierro y Mosevich (2011) el valor de U es el rendimiento promedio de la cartera, la primera parte \bar{R}_t representa el rendimiento promedio de la cartera. La segunda parte del término $\theta\sigma^2/2$ ajusta el rendimiento promedio en función de la varianza de la cartera, donde θ es el parámetro de aversión al riesgo subjetivo y σ^2 es la varianza de la cartera.

La tercera parte del término $\theta^2\sigma^3S/6$ introduce la asimetría en la función de utilidad, donde S es el coeficiente de asimetría de la distribución de rendimientos. Esto implica que la asimetría puede afectar el rendimiento esperado de la cartera. La última parte del término $\theta^3\sigma^4(K-3)/720$ incorpora la curtosis en la función de utilidad, donde K es el coeficiente de curtosis de la distribución de rendimientos. Para profundizar más sobre las ecuaciones de orden superior remitimos a Levy y Markowitz (1979); Pierro y Mosevich (2011).

Después de identificar las utilidades, el siguiente paso es calcular los rendimientos de cada portafolio, realizamos la suma ponderada de los retornos de acuerdo con los pesos asignados en cada vector. Cada vector representa un conjunto de 5 datos que indican la ponderación de cada activo en el portafolio. Inicialmente, estos vectores de pesos se distribuyen de manera equitativa, asignando un 20% a cada activo. Luego, multiplicamos cada vector de pesos por los retornos diarios de los ETF correspondientes para estimar los rendimientos diarios esperados.

$$Portf = \sum_{t=2}^{n=1258} \prod_{t=2}^{n=1258} R_{tn} * Peso_n \quad (9)$$

Sin embargo, es importante destacar las diferencias entre los tres vectores. El segundo vector, denominado "Peso 2" según la Tabla 6, ajusta los pesos de acuerdo con una función de utilidad que considera únicamente la media - varianza, es decir, el promedio aritmético y la volatilidad. Esto proporciona una perspectiva diferente de los rendimientos esperados.

Por otro lado, el tercer vector, "Peso 3" según la Tabla 6, difiere al ajustar sus pesos en función de momentos superiores, como la curtosis y la asimetría. El objetivo aquí es maximizar el valor de manera que se obtengan rendimientos esperados bajo esta modalidad. Esto se logra mediante la optimización de los pesos asignados a los 5 activos.

Para garantizar que los cálculos sean coherentes y útiles, establecemos restricciones de la

maximización. Estas condiciones aseguran que los valores de los activos sean mayores o iguales a cero y que la suma de los pesos totales sea igual al 100%. Este proceso permite una gestión efectiva y optimizada de los activos en el portafolio.

4. RESULTADOS

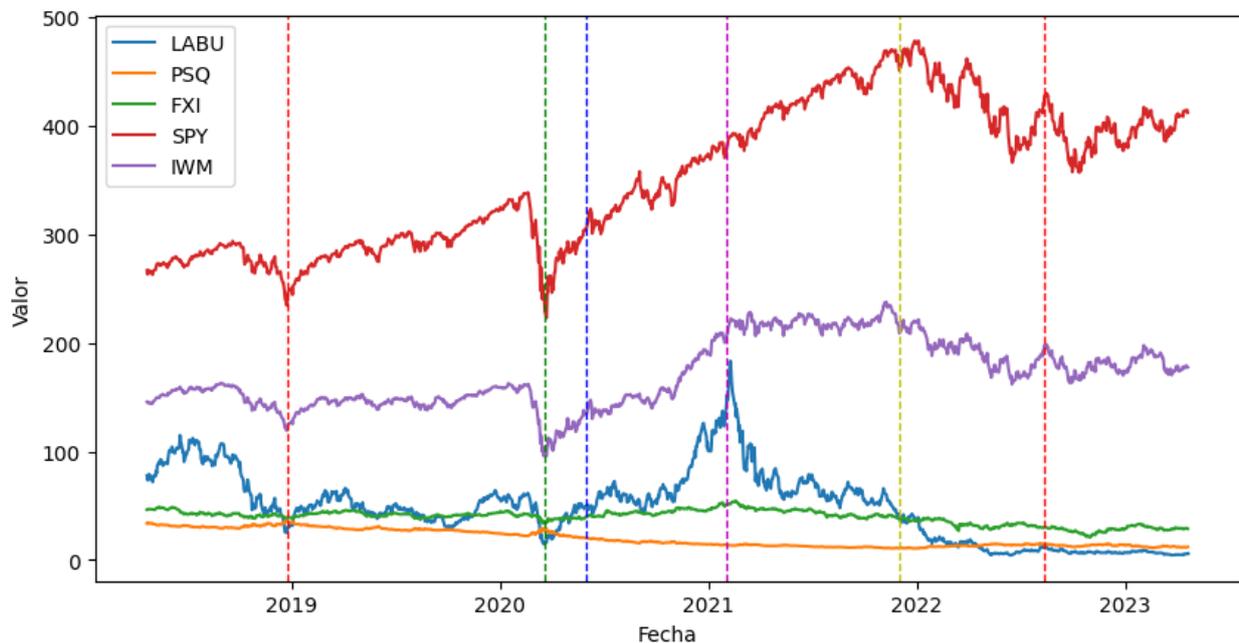


Figura 1. Precios históricos de los Etf's. Elaboración propia con Python en Google Colab.

Tabla 2.

Estadísticas sobre los retornos

	LABU	PSQ	FXI	SPY	IWM
Media	0,02%	-0,07%	-0,02%	0,04%	0,03%
Desviación	6,74%	1,64%	1,89%	1,35%	1,67%
Media anual	5,66%	-15,71%	-4,95%	11,66%	7,79%
Desviación anual	107,06%	26,08%	30,05%	21,44%	26,53%
Asimetría	-0,0821	0,3914	1,0873	-0,5049	-0,6893
Curtosis	1,3527	5,1125	14,7374	10,6887	7,5184

Fuente: Elaboración propia.

En el análisis de los ETFs LABU, PSQ, FXI, SPY e IWM, se destacan varias métricas significativas. En cuanto al rendimiento anual promedio, SPY lidera el grupo con un sólido 11.66%, mientras que LABU muestra un rendimiento positivo más modesto del 5.66%. Por otro lado, tanto PSQ, FXI como IWM muestran rendimientos anuales negativos, lo que indica un rendimiento global inferior.

En cuanto a la volatilidad anual (medida por la desviación estándar), LABU es el ETF más volátil, con un valor del 107.06%, lo que sugiere una mayor variabilidad en sus rendimientos. En contraste, PSQ e IWM son menos volátiles, con valores en torno al 26-27%. FXI y SPY exhiben volatilidades moderadas, situadas en el rango del 21-30%, lo que refleja un nivel de riesgo controlado.

En cuanto a la asimetría, FXI se destaca por tener una asimetría positiva significativa, lo que sugiere una posible cola derecha en su distribución de rendimientos, lo que podría indicar eventos extremos positivos. PSQ e IWM también muestran cierta asimetría hacia la derecha, aunque en menor medida. Por otro lado, LABU y SPY tienen asimetría hacia la izquierda, con SPY mostrando una asimetría más pronunciada en este aspecto.

Finalmente, en términos de curtosis, FXI exhibe una alta curtosis, lo que indica una concentración extrema de valores alrededor de la media. SPY también tiene una curtosis alta, lo que sugiere cierta concentración, pero en menor grado. PSQ e IWM tienen una curtosis moderadamente alta, indicando una concentración razonable en torno a la media. LABU muestra una curtosis moderada, lo que sugiere una distribución más equilibrada de sus rendimientos.



Figura 2. Matriz de correlación.
Elaboración propia con Python en Google Colab.

Existe una correlación positiva notable del 86% entre LABU y FXI, lo cual sugiere que ambos activos tienden a moverse en la misma dirección. Por otro lado, se observa una fuerte correlación negativa del -92% entre PSQ y SPY, indicando una relación inversa entre estos dos activos. La correlación positiva alta del 90% entre SPY e IWM señala una relación estrecha y positiva entre ambos.

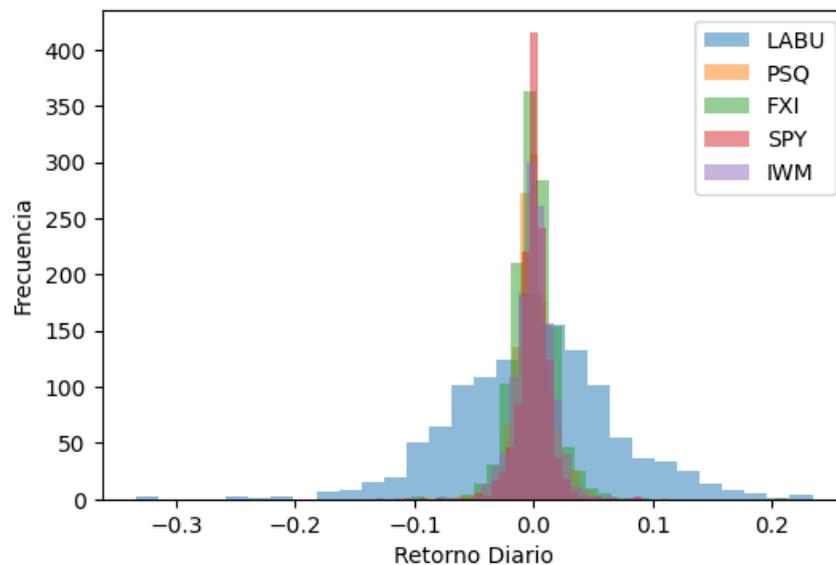


Figura 3. Histograma de los retornos históricos de los Etf.
Elaboración propia con Python en Google Colab.

Tabla 3.
Prueba *Kolmogorov-Smirnov*

	LABU	PSQ	FXI	SPY	IWM
Supremum	3,69%	8,47%	6,09%	9,39%	6,77%
Kolmogorov-Smirnov	1,307	3,00	2,160	3,328	2,399
Valor p (5%)	18,11%	0,012%	0,942%	0,001%	0,316%

Fuente: Elaboración propia.

Para el instrumento LABU, el valor p alto indica que no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula de que los retornos siguen una distribución específica. Para los instrumentos PSQ, FXI, IWM, los valores p bajos sugieren que hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula de que los retornos siguen una distribución específica.

Para el instrumento SPY, el valor p muy bajo indica una fuerte evidencia para rechazar la hipótesis nula de que los retornos siguen una distribución específica. En general, estos resultados sugieren que los retornos de los instrumentos PSQ, FXI, SPY e IWM tienen diferencias significativas con respecto a la distribución teórica específica que se está probando. Mientras que para el instrumento LABU, no hay suficiente evidencia para afirmar diferencias significativas en su distribución.

Tabla 4.
Momentos de orden superior

	\bar{R}_i	$\theta\sigma^2/2$	$\theta^2\sigma^3S/6$	$\theta^3\sigma^4(K-3)/720$
LABU	5,66%	-280,87%	-41,99%	30,85%
SQ	-15,71%	-32,72%	2,89%	0,41%
FXI	-4,95%	-27,52%	12,29%	2,09%
SPY	11,66%	0,17%	-2,07%	0,39%
IWM	7,79%	-9,81%	-5,36%	0,65%

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5.
Utilidad por ETF a partir de suposición de normalidad y momentos

	LABU	PSQ	FXI	SPY	IWM
Normalidad	-280,87%	-32,72%	-27,52%	0,17%	-9,81%
Momentos	-353,71%	-30,24%	-17,32%	-2,30%	-15,82%

Fuente: Elaboración propia.

En general, los resultados de ambas fórmulas muestran estimaciones del valor esperado de los retornos para diferentes activos financieros. La primera fórmula (ver ecuación 7) proporciona estimaciones más simples, considerando solo la media y la varianza de los retornos, es decir la normalidad. La segunda fórmula (ver ecuación 8), más compleja, incorpora información adicional sobre la asimetría y la curtosis de la distribución de los retornos (momentos).

Comparando los resultados entre las dos fórmulas, se observa que las estimaciones del valor esperado pueden variar significativamente. La segunda fórmula, al considerar la asimetría y la curtosis, tiende a proporcionar estimaciones más ajustadas y refinadas, lo que implica que tiene en cuenta características más complejas de la distribución de los retornos, sin embargo, en promedio, se espera la utilidad anual esperada es negativa para estos activos.

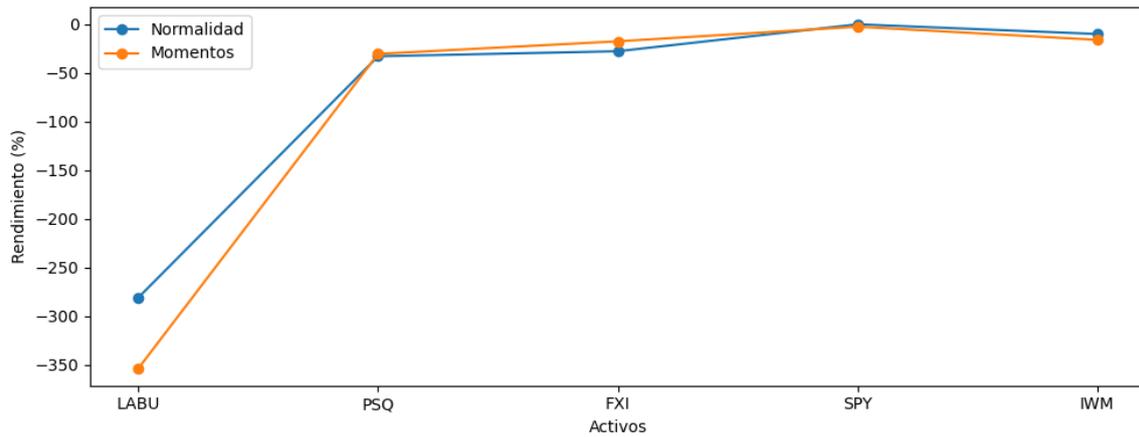


Figura 4. Utilidad por ETF a partir de suposición de normalidad y momentos. Elaboración propia en Google Colab.

Tabla 6.

Pesos originados tras optimización

	LABU	PSQ	FXI	SPY	IWM	Total
Peso 1	20,00%	20,00%	20,00%	20,00%	20,00%	100%
Peso 2	0,00%	11,14%	0,00%	88,86%	0,00%	100%
Peso 3	0,00%	18,26%	0,00%	81,74%	0,00%	100%

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 7.

Estadísticas de la distribución de rendimientos por portafolio

	Portafolio 1	Portafolio 2	Portafolio 3
Media	0,00%	0,03%	0,02%
Desviación	1,89%	1,09%	0,94%
Asimetría	-0,2602	-0,4556	-0,3889
Curtosis	2,8059	9,4126	8,0511
Media anual	0,37%	8,22%	6,07%
Desviación anual	30,05%	17,35%	14,96%

Fuente: Elaboración propia.

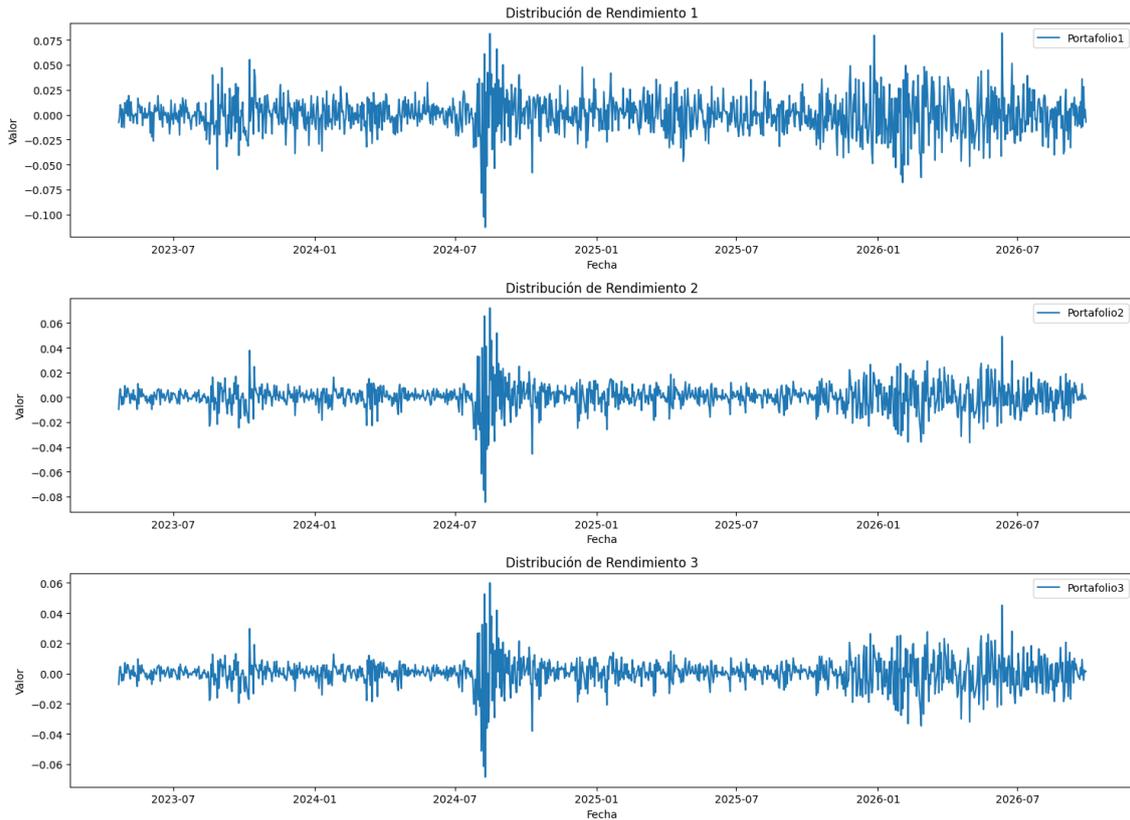


Figura 5. Distribución de rendimientos optimizador por portafolio. Elaboración propia con Python en Google Colab.

El Portafolio 2 muestra el mayor rendimiento promedio anual, con un 8.22%. Aunque los otros portafolios tienen rendimientos más bajos, también presentan menor volatilidad. El Portafolio 2 tiene una desviación anual del 17.35%, mientras que el Portafolio 3 tiene un 14.96% y el Portafolio 1 tiene un 30.05%. En cuanto a la asimetría y la curtosis, todos los portafolios tienen asimetría negativa, pero el Portafolio 2 se acerca más a una distribución simétrica. En cuanto a la curtosis, el Portafolio 1 tiene el valor más bajo.

Tabla 8.

Momentos de rentabilidad en portafolio

	\bar{R}_t	$\theta\sigma^2$	$\theta^2\sigma^3S$	$\theta^3\sigma^4(K-3)$
Portafolio 1	0,37%	22,57%	-2,94%	0,40%
Portafolio 2	8,22%	7,53%	-0,99%	0,15%
Portafolio 3	6,07%	5,60%	-0,54%	0,07%

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 9.

Utilidad por portafolio a partir de suposición de normalidad y de distribución arbitraria

	Portafolio 1	Portafolio 2	Portafolio 3
Normalidad	-22,20%	0,69%	0,48%
Momentos	-25,53%	-0,45%	-0,14%

Fuente: Elaboración propia.

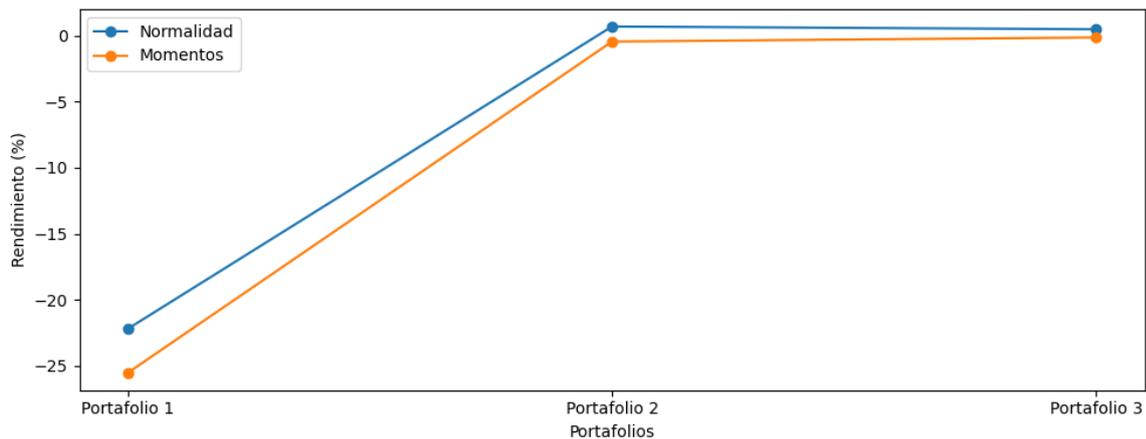


Figura 6. Utilidad por Portafolio a partir de suposición de normalidad y momentos. Elaboración propia con Python en Google Colab.

Los resultados anteriores revelan que, al considerar la suposición de normalidad, el Portafolio 2 demuestra un desempeño destacado en términos de utilidad (Ver tabla 9). Este hallazgo es especialmente notable debido a su curtosis notablemente más alta en comparación con los demás portafolios (Ver tabla 7). Una curtosis elevada indica una mayor concentración de los retornos alrededor de la media y una mayor probabilidad de eventos extremos. Además, el Portafolio 2 se caracteriza por tener la media positiva más alta y una volatilidad más baja en comparación con los otros portafolios (Ver tabla 7), sin embargo, asumiendo la ecuación de momentos superiores se puede ver que ningún portafolio es viable de inversión (Ver tabla 9), básicamente está revelando que existe mayor riesgo en todos los portafolios.

5. CONCLUSIONES

Esta investigación subraya la imperante necesidad de ampliar nuestros métodos de evaluación de carteras más allá de los enfoques tradicionales. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto que los métodos convencionales pueden resultar inadecuados para comprender la naturaleza de los rendimientos financieros. La inclusión de momentos superiores, como la asimetría y la curtosis, en la asignación óptima de activos emerge como un elemento esencial, dado que la variabilidad en los comportamientos de los rendimientos es una característica común en la práctica financiera. Estos momentos adicionales permiten capturar la complejidad y las colas pesadas en la distribución de los rendimientos, así como los eventos extremos que pueden ejercer un impacto significativo en las carteras de inversión.

Los resultados de este estudio indican que al considerar momentos superiores en la evaluación de carteras compuestas por activos como LABU, PSQ, FXI, SPY e IWM, se observa una reducción sustancial en los rendimientos. Bajo condiciones de distribución convencional, los rendimientos en su mayoría resultaron negativos, y esta tendencia se acentuó cuando se incorporaron momentos superiores en el análisis.

En relación a los portafolios, es relevante destacar que el Portafolio 2 demostró un desempeño relativamente adecuado en términos de utilidad cuando se asumió una distribución convencional de los rendimientos. Sin embargo, al considerar los momentos superiores en la ecuación, se revela que ninguno de los portafolios se considera apto para la inversión, lo que enfatiza un incremento en el nivel de riesgo en todos los portafolios. Este hallazgo subraya la importancia crítica de comprender y gestionar el riesgo asociado con la inversión en carteras de activos, particularmente en un entorno donde la variabilidad en los comportamientos de los rendimientos es una característica recurrente.

Este estudio contribuye significativamente al campo financiero al resaltar la importancia de considerar momentos superiores en la evaluación de carteras y al demostrar cómo pueden afectar significativamente los resultados. Además, proporciona una perspectiva valiosa sobre la gestión del riesgo en la inversión en activos financieros. Sus resultados respaldan la necesidad de investigaciones futuras que exploren en mayor profundidad la inclusión de

momentos superiores en la toma de decisiones de inversión.

6. REFERENCIAS

- Arditti, D. (1967). Risk and the required return on equity. *The Journal of Finance*, 22(1), 19-36. <https://doi.org/10.2307/2977297>
- Aksaraylı, M., y Pala, O. (2018). A polynomial goal programming model for portfolio optimization based on entropy and higher moments. *Expert Systems with Applications*, 94, 185-192. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2017.10.056>
- BlackRock (2023). iShares Russell 2000 ETF. <https://www.blackrock.com/cl/productos/239710/ishares-russell-2000-etf>
- Bergh, G., y Rensburg, P. (2008). Hedge funds and higher moment portfolio selection. *Journal of Derivatives & Hedge Funds*. <https://doi.org/10.1057/JDFH.2008.14>
- Brito, R. P., Sebastião, H., y Godinho, P. (2019). Portfolio management with higher moments: the cardinality impact. *International Transactions in Operational Research*, 26(6), 2531-2560. <https://doi.org/10.1111/itor.12404>
- Charupat, N., y Miu, P. (2013). The pricing efficiency of leveraged exchange-traded funds: evidence from the US markets. *Journal of Financial Research*, 36(2), 253-278. <https://doi.org/10.1111/j.1475-6803.2013.12010.x>
- Dahlquist, M., Farago, A., y Tédongap, R. (2017). Asymmetries and portfolio choice. *The Review of Financial Studies*, 30(2), 667-702. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhw091>
- Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *The journal of Business*, 38(1), 34-105.
- Harvey, C.R., Liechty, J.C., Liechty, M.W., y Mueller, P. (2010). Portfolio selection with higher moments. *Quantitative Finance*, 10, 469 - 485. <http://dx.doi.org/10.1080/14697681003756877>
- Harvey, C. R., y Siddique, A. (1999). Autoregressive conditional skewness. *Journal of financial and quantitative analysis*, 34(4), 465-487. <https://doi.org/10.2307/2676230>
- Gong, X., Yu, C., Min, L., & Ge, Z. (2021). Regret theory-based fuzzy multi-objective portfolio selection model involving DEA cross-efficiency and higher moments. *Applied Soft Computing*, 100, 106958. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106958>
- Jean, W. H. (1971). The extension of portfolio analysis to three or more parameters. *Journal of financial and Quantitative Analysis*, 6(1), 505-515. <https://doi.org/10.2307/2330125>
- Konno, H., Hiroshi, S., y Hiroaki, Y. (1993). A mean-absolute deviation-skewness portfolio optimization model. *Annals of Operations Research*. 45(1), 205-220.
- Lai, T. Y. (1991). Portfolio selection with skewness: a multiple-objective approach. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 1, 293-305. <https://doi.org/10.1007/BF02408382>
- Levy, H., y Arditti, F. D. (1975). Valuation, Leverage and the Cost of Capital in the Case of Depreciable Assets: A Reply. *The Journal of Finance*, 30(1), 221-223. <https://doi.org/10.2307/2978446>
- Levy, H., y Markowitz, H. M. (1979). Approximating expected utility by a function of mean and variance. *The American Economic Review*, 69(3), 308-317. <https://www.jstor.org/stable/1807366>
- Markowitz, H. (1952). The utility of wealth. *Journal of political Economy*, 60(2), 151-158.

- Mandelbrot, B. (1963). New methods in statistical economics. *Journal of political economy*, 71(5), 421-440. <https://doi.org/10.1086/258792>
- Molina, M. (2022). Paso a paso. Prueba de la t de Student para muestras independientes. *Revista electrónica AnestesiaR*, 14(8), 1 - 5. <https://doi.org/10.30445/rear.v14i8.1060>
- Pierro, M. D., y Mosevich, J. (2011). Effects of skewness and kurtosis on portfolio rankings. *Quantitative Finance*, 11(10), 1449-1453. <https://doi.org/10.1080/14697688.2010.495723>
- Peiro, A. (1999). Skewness in financial returns. *Journal of Banking & Finance*, 23(6), 847-862. [https://doi.org/10.1016/S0378-4266\(98\)00119-8](https://doi.org/10.1016/S0378-4266(98)00119-8)
- Premaratne, G., y Bera, A. K. (2000). Modeling asymmetry and excess kurtosis in stock return data. *Illinois Research & Reference Working Paper No. 00-123*. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.259009>
- Vilella, F. (2020). Rebotes del Covid-19 mantendrán en auge a sectores ya beneficiados. *Revista Uruguaya de Economía y Finanzas Personales, Portfolio*, 102(8), 29 – 32.
- Saranya, K., y Prasanna, P. K. (2014). Portfolio selection and optimization with higher moments: Evidence from the Indian stock market. *Asia-Pacific Financial Markets*, 21, 133-149. <https://doi.org/10.1007/s10690-014-9180-0>
- Salinas, S. M., Maldonado, D. A., y Díaz, L. G. (2010). Estimación del riesgo en un portafolio de activos. *Apuntes del CENES*, 29(50), 117-150.
- Sweta, K. (2023). Top-Ranked ETFs to Buy on Small-Cap Comeback. Yahoo Finance.
- Steyn, J. P., y Theart, L. (2021). The pricing of skewness: Evidence from the Johannesburg Stock Exchange. *Investment Analysts Journal*, 50(2), 133-144. <https://doi.org/10.1080/10293523.2021.1898744>
- TYVA (2023). Qué es el ETF SPY. <https://tyba.com.co/blog/spy/>
- Xu, Z., Li, X., y Chevapatrakul, T. (2019). Return Asymmetry and the Cross Sección of Stock Returns. *Social Science Research Network*. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2850842>
- Zhu, F., Luo, X., y Jin, X. (2019). Predicting the volatility of the iShares China Large-Cap ETF: What is the role of the SSE 50 ETF?. *Pacific-Basin Finance Journal*, 57, 101192. <https://doi.org/10.1016/j.pacfin.2019.101192>