

TARIFICACIÓN EN SEGUROS GENERALES CON INTRODUCCIÓN DE FRANQUICIAS NO CONSTANTES EN LA DISTRIBUCIÓN DEL COSTE DE LOS SINIESTROS

PRICING IN GENERAL INSURANCE WITH NON-CONSTANT DEDUCTIBLES IN CLAIM COST DISTRIBUTIONS

Julián Carlos Oliver Raboso

Actuario consultor

Universidad Rey Juan Carlos / Universidad Pontificia Comillas / CUNEF Universidad / UNED.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-3838-0451>

joliver@actuarios.eu

(Autor para correspondencia/Corresponding author)

Antonio Ferri Vidal

ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-2497-4843>

antoni.ferri@actuarios.org

Fecha de recepción: 11 septiembre 2025

Fecha de aceptación: 2 abril 2026

RESUMEN

La teoría del riesgo colectivo establece que el cálculo de la prima pura en seguros generales se obtiene como el producto de los valores esperados de las variables aleatorias número de siniestros y coste de los siniestros que conforman la variable compuesta que genera el proceso de siniestralidad agregada. Este estimador para la prima pura es posible gracias a asumir la hipótesis de que el número de siniestros y el coste de los siniestros son variables aleatorias independientes y, que el coste de los siniestros, caso que este sea mayor a uno, son independientes entre sí e idénticamente distribuidos. Si se relaja la hipótesis de que las distribuciones del coste de los siniestros sean idénticas, el estimador para la prima pura cambiaría. A partir del nuevo modelo es posible encontrar aplicaciones actuariales para la tarificación aplicando franquicias estocásticas no necesariamente constantes que pueden ayudar a mejorar el proceso de tarificación.

Palabras clave: prima pura, franquicia absoluta, seguros generales, distribuciones.

ABSTRACT

The collective risk theory establishes that the calculation of the pure premium in general insurance is obtained as the product of the expected values of the random variables representing the number of claims and the cost of claims, which together constitute the compound variable generating the aggregate claims process. This estimator for the pure premium is feasible due to the assumption that the number of claims and the cost of claims are independent random variables, and that claim costs, when exceeding one claim, are mutually independent and identically distributed. If the assumption of identical distributions for claim costs is relaxed—that is, if claim costs are no longer assumed to be identically distributed—the estimator for the pure premium would change. From this new model, actuarial applications for pricing can be derived by incorporating stochastic deductibles, these deductibles can vary for each claim allowing more flexibility to the pricing process.

Keywords: risk premium, deductible, general insurance, basic distributions.



1. INTRODUCCIÓN

La teoría del riesgo colectivo establece que el cálculo de la prima pura en seguros generales se obtiene como el producto de los valores esperados de las variables aleatorias número de siniestros – discreta – y coste de los siniestros – continua – que conforman la variable compuesta que genera el proceso de siniestralidad agregada.

Si se relaja la hipótesis de que las distribuciones del coste de los siniestros sean idénticas, el estimador para la prima pura cambiaría. A partir del nuevo modelo es posible encontrar aplicaciones actuariales para la tarificación aplicando franquicias estocásticas.

La aplicación de franquicias en el cálculo de la prima pura genera tres efectos. El primero de ellos es un efecto psicológico en el asegurado que permite una concienciación de este al hacerle partícipe del coste del siniestro. El segundo efecto es una disminución del coste del siniestro a cargo del asegurador y consecuentemente del coste medio. Por último, la prima pura a pagar por el tomador del seguro es menor al disminuir el coste medio.

Bajo la óptica de este trabajo, se debe entender la franquicia como cualquier truncamiento del dominio de la variable que representa el coste de los siniestros¹ a cargo del asegurador. De este modo pueden surgir tantas tipologías de franquicias como sea capaz la aseguradora de definir, y constituyen una herramienta de transferencia de riesgo al asegurado.

Con todo, encontrar el equilibrio entre la reducción de ingresos por la reducción de prima y la reducción de la siniestralidad y/o coste medio puede chocar con la estrategia de negocio u otros objetivos.

Una franquicia habitual es la denominada franquicia absoluta que trasfiere las primeras A unidades monetarias del coste de cada siniestro al asegurado, siendo el exceso de A a cargo del asegurador.

Este tipo de franquicia suele fijar la cuantía A para cada uno de los siniestros que sufra el asegurado en el periodo de cobertura, lo que no altera la condición de “idénticamente distribuidas” de las variables aleatorias que representan el coste de los siniestros; únicamente altera sus parámetros, sin embargo, todos de igual manera.

Si la cuantía A deja de ser constante para cada siniestro acaecido en el periodo de cobertura la condición – “idénticamente distribuidas” – sobre las variables aleatorias que representa el coste de los siniestros y bajo la que se deriva la prima pura ya no se mantiene por lo que el estimador del producto de costes esperados ya no es útil y se requiere una ampliación a un caso más general.

2. ESTADO DEL ARTE

Existe diversa literatura actuarial relacionada con el tópico de la tarificación y la incidencia de las franquicias en la prima pura o de riesgo en el ámbito de los seguros generales. Los diversos trabajos abordan esta problemática desde varias ópticas que abarcan desde los fundamentos matemáticos, hasta la medición del impacto de las franquicias en las primas, pasando por la aplicación de metodologías clásicas y más recientes.

En este sentido, los trabajos de Vegas *et al.* (2004) y (2005) presentaban el desarrollo de modelos teóricos de probabilidad para el coste de los siniestros con truncamiento del dominio de la variable coste a cargo de asegurador, o estadísticamente hablando; modelos de probabilidad con variables condicionadas.

Si bien las referencias cuentan ya con dos décadas desde su publicación, siguen siendo dos

¹ En la práctica, sería más conveniente hacer referencia a aplicar franquicias a expedientes de siniestros y no a siniestros. No obstante, sin pérdida de generalidad, a efectos de este trabajo se hará referencia a siniestro en el sentido amplio del término.

trabajos excelentes que muestran diversas maneras de truncar el dominio de la variable – en definitiva, distintas definiciones de franquicias – que pueden ser aplicadas tanto desde el punto de vista del negocio de seguro directo frente a seguros particulares; como desde el punto de vista del negocio reasegurador frente a aseguradoras.

Diversos trabajos, Klugman *et al.* (2019) y Werner y Modlin (2016), han establecido las bases matemáticas para tratar franquicias, que se modelan como transformaciones de la distribución de severidad. La literatura del *Casualty Actuarial Society* (2018), Bahnemann (2015), también tratan aspectos relacionados con los límites de las distribuciones al aplicar franquicias.

El trabajo de Brown y Schmitz (2006) y artículos como los de Lee y Frees (2016) y Lee (2017) han sistematizado la relación entre relatividades de franquicia obtenidas con distintos modelos lineales generalizados y métricas tales como el *Loss Estimation Ratio* y la *Limited Average Severity* poniendo foco en la aplicación práctica en las aseguradoras.

Una práctica común en el sector asegurador derivada de la extensión del uso de modelos lineales generalizados es construir tablas de relatividades de franquicia aplicadas sobre una prima base; si bien es común el uso de metodologías más sofisticadas que reflejen la variabilidad por tipologías de riesgo.

Ismail (2011) aplica la simulación Monte Carlo para cuantificar el efecto de diferentes franquicias y límites. Estos casos muestran que la interacción entre los deducibles y los límites agregados puede ser compleja, especialmente en el entorno del reaseguro.

Este trabajo difiere de los estudios existentes en que aborda la problemática relacionada con la aplicación de las franquicias no constantes. Más allá del desarrollo de una nueva metodología; el enfoque propuesto – la aplicación de franquicias progresivas más gravosas para el asegurado en función de la siniestralidad declarada – se centra en la repercusión que pudiera tener sobre el asegurado el desincentivo que supone asumir mayor participación el coste del siniestro cuanto mayor es el número de siniestros declarados en el periodo de cobertura. Este trabajo es una continuación de los artículos de Vegas *et al.* (2004) y Vegas *et al.* (2005).

3. MODELO DE SINIESTRALIDAD AGREGADA CLÁSICO

Partiendo de la definición de la variable compuesta S siniestralidad agregada,

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N = \sum_{i=0}^N X_i \quad [1]$$

donde N es una variable aleatoria que representa el número de siniestros y X_i representa la variable aleatoria del i -ésimo siniestro. Asumiendo que N y X son variables aleatorias independientes y que X_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, la función de distribución $F_S(S) = P(S \leq s | N = n)$ de S es

$$\begin{aligned} F_S(S) &= P(S \leq s) = \\ &P_N(N = 0) + P_N(N = 1) \cdot P_{X_1}(X_1 \leq s) + \\ &P_N(N = 2) \cdot P_{X_1+X_2}(X_1 + X_2 \leq s) + \dots + \\ &P_N(N = n) \cdot P_{X_1+\dots+X_n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq s) = \\ &\sum_{n=0}^{\infty} P_N(N = n) \cdot V^{*n}(X_i) \end{aligned} \quad [2]$$

Donde $V^{*n}(X_i) = P_{\sum_{j=1}^n X_j}$ es la n -convolución de la variable aleatoria $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ o función de distribución de la suma de las variables aleatorias X_i ; $P_N(N = n)$ es la probabilidad de que la variable aleatoria N tome el valor $n = 0, 1, \dots$. Es posible encontrar el valor esperado $E[S]$ de S que representará el valor de la prima pura.

$$\begin{aligned}
E[S] &= \int_0^\infty S \cdot dF(S) = \int_0^\infty S \cdot d \left\{ \sum_{n=0}^\infty P_N(N=n) \cdot V^{*n}(X) \right\} = \\
&= \sum_{n=0}^\infty P_N(N=n) \cdot \int_0^\infty S \cdot dV^{*n}(X) = \sum_{n=0}^\infty P_N(N=n) \cdot \int_0^\infty \sum_{i=1}^n X_i \cdot dV^{*i}(X) = \\
&= \sum_{n=0}^\infty P_N(N=n) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \int_0^\infty X_i \cdot dV^{*i}(X) \right) = \sum_{n=0}^\infty P_N(N=n) \cdot \sum_{i=1}^n E[X] = \sum_{n=0}^\infty P_N(N=n) \cdot n \cdot E[X] = \\
&= E[X] \cdot E[N]
\end{aligned} \tag{3}$$

Operando adecuadamente, también puede expresarse el valor esperado de S a través de las funciones de supervivencia, $S_X(x) = P_X(X > x)$ y $S_N(n) = P_N(N > n)$, de las variables X y N , respectivamente; lo que resulta conveniente a efectos del propósito de este trabajo como se verá más adelante.

$$E[S] = \int_0^\infty S_X(x) dx \cdot \sum_{j=0}^\infty P_N(N > j) \tag{4}$$

Bajo las hipótesis de [1], se puede demostrar que la varianza de S , $V[S]$, es:

$$V[S] = E^2[X] \cdot V[N] + V[X] \cdot E[N] \tag{5}$$

Al relajar la hipótesis de que las variables X_i son idénticamente distribuidas el estimador obtenido en [3] ya no es útil, ni resultará en una expresión tan elegante.

4. COSTE ESPERADO Y VARIANZA DE X CON FRANQUICIA ABSOLUTA DE CUANTÍA A

Para determinar el coste esperado de X con franquicia absoluta de cuantía A nos remitimos al artículo de referencia mencionado Vegas *et al.* (2005) en el que se establece lo siguiente:

$$E[X|A] = \int_A^{+\infty} (x - A) \cdot f_X(x) dx \tag{6}$$

Expresión que, para mayor facilidad de interpretación, puede ser reducida a:

$$E[X|A] = \bar{c} - \int_0^A x \cdot f_X(x) dx - A \cdot (1 - F_X(A)) \tag{7}$$

Donde $\bar{c} = E[X]$ es el coste esperado de X sin franquicia, $E[X|A]$ es el coste medio de X con franquicia absoluta de cuantía A , $f_X(x)$ es la función de densidad de la variable aleatoria X y $F_X(x)$ es la función de distribución de la variable aleatoria X .

La varianza de X con franquicia absoluta de cuantía A se obtendría resolviendo la expresión:

$$V[X|A] = E[X^2|A] - E^2[X|A] = \int_A^{+\infty} (x - A)^2 \cdot f_X(x) dx - \left(\int_A^{+\infty} (x - A) \cdot f_X(x) dx \right)^2 \tag{8}$$

Que de manera simplificada quedaría expresada como:

$$V[X|A] = 2 \cdot \int_A^{+\infty} (x - A) \cdot S_X(x) dx - \left(\int_A^{+\infty} S_X(x) dx \right)^2 \tag{9}$$

Donde $S_X(x)$ es la función de supervivencia de la variable aleatoria X definida como $1 - F_X(x) = 1 - P(X \leq x)$.

Particularizando la variable aleatoria X para tres distribuciones distintas obtendríamos las expresiones mostradas en la Tabla 1 y Tabla 2 para el coste esperado y la varianza, respectivamente, de X con franquicia absoluta de cuantía A :

Distribución ² de X	$E[X A]$	
Exponencial	$\bar{c} \cdot S_X(A)$	[10]
LogNormal	$\bar{c} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\log(A) - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right) \right] - A \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\log(A) - \mu}{\sigma}\right) \right]$	[11]
Gamma	$\bar{c} \cdot S_X(A \alpha + 1; \beta) - A \cdot S_X(A \alpha; \beta)$	[12]

Tabla 1: Particularización de $E[X|A]$ para una selección de distribuciones. Fuente: Vegas *et al.* (2005).

Distribución de X	$V[X A]$	
Exponencial	$\bar{c}^2 \cdot [2 \cdot S_X(A) - S_X(A)^2]$	[13]
LogNormal	$e^{2 \cdot (\mu + \sigma^2)} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(A) - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right) \right] - 2 \cdot A \cdot e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(A) - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right) \right] + A^2 \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(A) - \mu}{\sigma}\right) \right] - \left[\bar{c} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(A) - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right) \right] - A \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(A) - \mu}{\sigma}\right) \right] \right]^2$	[14]
Gamma	$\frac{\alpha \cdot (\alpha + 1)}{\beta^2} \cdot S_X(A \alpha + 2; \beta) - 2 \cdot A \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot S_X(A \alpha + 1; \beta) + A^2 \cdot S_X(A \alpha; \beta) - [\bar{c} \cdot S_X(A \alpha + 1; \beta) - A \cdot S_X(A \alpha; \beta)]^2$	[15]

Tabla 2: Particularización $V[X|A]$ para una selección de distribuciones. Fuente: Vegas *et al.* (2005).

A partir de las expresiones de la Tabla 1 se deduce que la prima pura a pagar por el asegurado en el caso que exista una franquicia absoluta de cuantía A en el coste X de los siniestros es

$$E[S|A] = E[N] \cdot E[X|A] \quad [16]$$

A partir de la Tabla 2 y de [5] se deducen expresiones particulares para $V[S|A]$, pero más complejas que lo obtenido en [16], para cada una de las distribuciones propuestas.

$$V[S|A] = E^2[X|A] \cdot V[N] + V[X|A] \cdot E[N] \quad [17]$$

5. COSTE ESPERADO Y VARIANZA DE X CON FRANQUICIA ABSOLUTA DE CUANTÍA A_i NO CONSTANTE

Si se asume que el coste esperado de los siniestros es distinto – lo que significa que las distribuciones de las cuantías de los siniestros ya no son idénticas – resulta conveniente

² La función $\Phi(\cdot)$ representa la función de distribución de una variable aleatoria normal estándar.

reformular el estimador de la prima pura y de la varianza.

Introduciendo por ejemplo franquicias absolutas distintas – progresivas, por ejemplo – para cada siniestro, esto es, una franquicia A_1 para el primer siniestro, A_2 para el segundo, y así sucesivamente; de modo que haya cierta progresividad, por ejemplo, creciente ($A_1 < A_2 < \dots$) en la franquicia que desincentive la declaración de siniestros a medida que incrementa el número de siniestros en el periodo de cobertura; se pueden derivar estimadores para la prima pura $E[S|A_i]$ y para la varianza $V[S|A_i]$.

Considérese el modelo de siniestralidad agregada definido en [1]. Supónganse que cada siniestro i tiene una franquicia A_i , de modo que el coste esperado pasa de $E[X]$ a $E[X|A_i]$.

Se define,

$$\mu_i = E[X_i|A_i], \quad v_i = V[X_i|A_i], \quad p_i = P(N \geq i)$$

Es posible reescribir [1] como:

$$S = \sum_{i \geq 1} I_i \cdot X_i$$

donde $I_i = 1_{\{N \geq i\}}$ es una variable aleatoria binaria con $E[I_i] = p_i$ y $V[I_i] = p_i \cdot (1 - p_i)$ independiente de X_i .

Entonces, $S|A_i$ queda expresada como $S|A_i = \sum_{i \geq 1} I_i \cdot X_i|A_i$, y su valor esperado

$$E[S|A_i] = E\left[\sum_{i \geq 1} I_i \cdot X_i|A_i\right] = \sum_{i \geq 1} E[I_i \cdot X_i|A_i] = \sum_{i \geq 1} E[I_i] \cdot E[X_i|A_i] = \sum_{i \geq 1} p_i \cdot \mu_i \quad [18]$$

Donde $E[X_i|A_i]$ es el valor esperado del coste del siniestro i -ésimo, que ahora son distintos entre sí al asumir que las franquicias no son constantes. De esta forma se establece que la prima pura consiste en la suma ponderada por su probabilidad del coste esperado del i -ésimo siniestros. En el caso de que el coste esperado del i -ésimo siniestro fuera el mismo para todos los siniestros la formulación establecida en [18] reconciliaría con la de [3].

La varianza de $S|A_i$ queda expresada del siguiente modo:

$$V[S|A_i] = V\left[\sum_{i \geq 1} I_i \cdot X_i|A_i\right] = \sum_{i \geq 1} V[I_i \cdot X_i|A_i] + 2 \cdot \text{Cov}[I_i \cdot X_i|A_i; I_j \cdot X_j|A_j] \quad [19]$$

Las varianzas individuales $V[I_i \cdot X_i|A_i]$, se pueden expresar en función de los momentos de primer y segundo orden,

$$\begin{aligned} V[I_i \cdot X_i|A_i] &= E[I_i \cdot X_i|A_i]^2 - E^2[I_i \cdot X_i|A_i] = E[I_i] \cdot E[X_i^2|A_i] - (E[I_i] \cdot E[X_i|A_i])^2 \\ &= p_i \cdot (v_i + \mu_i^2) - (p_i \cdot \mu_i)^2 \end{aligned} \quad [20]$$

Reordenando los términos,

$$V[I_i \cdot X_i|A_i] = p_i \cdot (v_i + \mu_i^2) - (p_i \cdot \mu_i)^2 = p_i \cdot v_i + p_i \cdot \mu_i^2 - p_i^2 \cdot \mu_i^2 = p_i \cdot v_i + \mu_i^2 \cdot p_i \cdot (1 - p_i) \quad [21]$$

La covarianza $\text{Cov}[I_i \cdot X_i|A_i; I_j \cdot X_j|A_j]$ expresada como el producto cruzado de las variables menos el producto de los valores esperados queda,

$$\text{Cov}[I_i \cdot X_i|A_i; I_j \cdot X_j|A_j] = E[I_i \cdot X_i|A_i \cdot I_j \cdot X_j|A_j] - E[I_i \cdot X_i|A_i] \cdot E[I_j \cdot X_j|A_j] \quad [22]$$

Para el primer término, puesto que si $j > i$ entonces $p_j > p_i$ y $E[I_i \cdot I_j] = p_j$

$$E[I_i \cdot X_i|A_i \cdot I_j \cdot X_j|A_j] = p_j \cdot \mu_j \cdot \mu_i \quad [23]$$

El segundo término,

$$E[I_i \cdot X_i | A_i] \cdot E[I_j \cdot X_j | A_j] = p_i \cdot \mu_i \cdot p_j \cdot \mu_j \quad [24]$$

Reunificando ambos términos,

$$\text{Cov}[I_i \cdot X_i | A_i; I_j \cdot X_j | A_j] = p_j \cdot \mu_j \cdot \mu_i - p_i \cdot \mu_i \cdot p_j \cdot \mu_j = p_j \cdot \mu_j \cdot \mu_i \cdot (1 - p_i) \quad [25]$$

Por lo tanto, la varianza de $S|A_i$ queda reducida a lo ya presentado en [19],

$$V[S|A_i] = \sum_{i \geq 1} p_i \cdot v_i + \mu_i^2 \cdot p_i \cdot (1 - p_i) + 2 \cdot \sum_{i < j} p_j \cdot \mu_j \cdot \mu_i \cdot (1 - p_i) \quad [26]$$

La expresión [26] reconciliaría con [5] o [17] en el caso que $V[X_i | A_i] = V[X]$ y $E[X_i | A_i] = E[X]$, es decir, en el caso que no hubiera franquicia o esta fuese constante, en cuyo caso $V[X_i | A_i] = V[X|A]$ y $E[X_i | A_i] = E[X|A]$.

6. APLICACIÓN PRÁCTICA

Identificadas en [10], [11] y [12] las expresiones para el coste esperado de X con franquicia absoluta de cuantía A para un conjunto de distribuciones y , establecido en [18] el modelo de cálculo para la prima pura, $E[S|A_i]$, en el caso que se rompa la condición que exige que las distribuciones de los costes de los siniestros sean idénticas; se muestran a continuación diversos ejemplos de la estimación de la prima pura con franquicias absolutas progresivas en el coste de los siniestros, asumiendo una distribución de Poisson o Binomial Negativa para el número de siniestros en todos los casos.

Para cada modelo de coste, asumiendo una distribución de Poisson o Binomial Negativa para el número de siniestros³, se muestra la comparativa entre prima pura sin franquicia, $E[S]$, frente a prima pura, $E[S|A]$, cuando el coste esperado de X con franquicia absoluta de cuantía A , $E[X|A]$; y prima pura, $E[S|A_i]$, cuando el coste medio de X contempla franquicias absolutas progresivas de cuantías A_i en cada uno de los i -ésimos siniestros, $E[X|A_i]$.

Con tal fin, en la Tabla 3 se presenta la parametrización de las distribuciones y en la Tabla 4 se muestra la progresividad de las franquicias absolutas. En la Tabla 5 a la Tabla 8 muestran la comparativa de primas puras de cada uno de los modelos de coste, sin franquicia, con franquicia progresiva y con franquicia constante y sus desviaciones típicas.

Distribución	Parámetros
Poisson	$\lambda = 0,3$
Binomial Negativa	$r = 5; p = 0,83$
Exponencial	$\theta = 0,0019$
LogNormal	$\mu = 5,4695 \quad \sigma = 1,2306$
Gamma	$\alpha = 0,2819 \quad \beta = 0,0005$

Tabla 3: Parámetros de las distribuciones. Fuente: Elaboración propia.

³ Los resultados se han obtenido mediante el estimador analítico truncando el número de siniestros en $k = 12$ puesto que es un número suficientemente alto dados los parámetros de las distribuciones de frecuencia y $P(N > k) \approx 0$.

Nº siniestro	A_i
1er.	300
2o.	350
3er.	400
4o.+	500

Tabla 4: Cuantías de franquicia absoluta⁴ en función del número de siniestro.
Fuente: Elaboración propia.

Distribución de S	λ	$E[S]$	$E[S A_i]$	$E[S A]$	Diferencia*
Poisson Exponencial	0,3	151,84	82,77	83,94	1,17
	1	506,15	266,70	279,81	13,11
	2,5	1.265,37	620,15	699,53	79,38
Poisson LogNormal	0,3	151,84	90,10	91,00	0,90
	1	506,15	293,42	303,32	9,90
	2,5	1.265,37	689,75	758,30	68,55
Poisson Gamma	0,3	151,84	107,14	107,91	0,77
	1	506,15	351,11	359,70	8,59
	2,5	1.265,37	846,55	899,26	52,71

Tabla 5: Prima pura de S sin franquicia $E[S]$, con franquicias absolutas constantes $E[S|A]$ y progresivas $E[S|A_i]$.Poisson. Fuente: Elaboración propia. * Diferencia entre franquicia progresiva y constante.

Distribución de S	λ	$\sigma[S]$	$\sigma[S A_i]$	$\sigma[S A]$	Diferencia*
Poisson Exponencial	0,3	392,06	288,34	291,51	3,17
	1	715,80	512,92	532,22	19,30
	2,5	1.131,78	770,30	841,50	71,20
Poisson LogNormal	0,3	591,04	477,44	480,82	3,38
	1	1.079,09	857,02	877,86	20,84
	2,5	1.706,20	1.307,94	1.388,02	80,08
Poisson Gamma	0,3	658,51	553,76	589,32	35,56
	1	1.202,27	1.003,78	1.075,95	72,17
	2,5	1.900,96	1.564,20	1.701,22	137,02

Tabla 6: Desviación típica de S sin franquicia $\sigma[S]$, con franquicias absolutas constantes $\sigma[S|A]$ y progresivas $\sigma[S|A_i]$.Poisson. Fuente: Elaboración propia.

* Diferencia entre franquicia progresiva y constante.

⁴ En el caso de franquicia absoluta constante para todos los siniestros se asume la del siniestro número uno. Se asume un máximo de cuatro franquicias distintas cada una para cada uno de los cuatro eventuales siniestros. Se asume la cuantía de la franquicia del cuarto siniestro para el quinto y mayor número de siniestros.

Distribución de S	$r; p$	$E[S]$	$E[S A_i]$	$E[S A]$	Diferencia*
Binomial	2; 0,83	151,84	81,98	83,94	1,96
Negativa	5; 0,83	506,15	264,16	279,81	15,11
Exponencial	13; 0,83	1.265,35	615,95	699,52	83,57
Binomial	2; 0,83	151,84	89,51	91,00	1,49
Negativa	5; 0,83	506,15	291,53	303,32	11,79
LogNormal	13; 0,83	1.265,35	695,63	758,29	62,66
Binomial	2; 0,83	151,84	106,63	107,91	1,28
Negativa	5; 0,83	506,15	349,41	359,70	10,29
Gamma	13; 0,83	1.265,35	843,67	899,24	55,57

Tabla 7: Prima pura de S sin franquicia $E[S]$, con franquicias absolutas constantes $E[S|A]$ y progresivas $E[S|A_i]$. Binomial Negativa**. Fuente: Elaboración propia.

* Diferencia entre franquicia progresiva y constante.

** Parámetros de la distribución Binomial que se derivan a partir de los parámetros lambda de la Poisson y un parámetro de sobre dispersión de 1,2.

Distribución de S	$r; p$	$\sigma[S]$	$\sigma[S A_i]$	$\sigma[S A]$	Diferencia*
Binomial	2; 0,83	411,20	293,61	299,46	5,85
Negativa	5; 0,83	750,74	521,48	547,73	26,25
Exponencial	13; 0,83	1.186,92	783,14	864,41	81,27
Binomial	2; 0,83	603,91	480,57	486,53	5,96
Negativa	5; 0,83	1.102,58	862,15	888,28	26,13
LogNormal	13; 0,83	1.743,25	1.316,75	1.404,45	87,70
Binomial	2; 0,83	670,08	559,29	595,87	36,58
Negativa	5; 0,83	1.233,40	1.013,22	1.087,91	74,69
Gamma	13; 0,83	1.934,29	1.578,69	1.720,08	141,08

Tabla 8: Desviación típica de S sin franquicia $\sigma[S]$, con franquicias absolutas constantes $\sigma[S|A]$ y progresivas $\sigma[S|A_i]$. Binomial Negativa**. Fuente: Elaboración propia.

* Diferencia entre franquicia progresiva y constante.

** Parámetros de la distribución Binomial que se derivan a partir de los parámetros lambda de la Poisson y un parámetro de sobre dispersión de 1,2.

Los resultados de las Tabla 5 a Tabla 8 han sido obtenidos con los estimadores analíticos definidos en [3], [5], [16], [17], [18] y [19]. Sin embargo, puesto que tanto el modelo para S, como el de $S|A$ y el de $S|A_i$ pueden ser simulados mediante algún algoritmo, es posible obtener los momentos de la distribución simulada y compararlos con los resultados de los estimadores analíticos. En el Anexo se proporciona el código R para el lector interesado en explorar esta vía.

7. CONCLUSIONES

La aplicación de franquicias en el cálculo de la prima es una herramienta de transferencia de riesgo al asegurado. Además de la reducción en la siniestralidad a cargo de la aseguradora, y por lo tanto del coste medio y de la prima pura a cargo del asegurado; las franquicias suponen un elemento disuasorio para el asegurado en la declaración del siniestro. Además, las franquicias reducen la varianza que soporta la entidad aseguradora, lo que reduce el riesgo para la compañía si se mide este por la variabilidad.

No obstante, la introducción de franquicias en perfiles de riesgo con baja siniestralidad puede suponer una pérdida de ingresos para la aseguradora consecuencia de la reducción en la prima pura. Sería, pues, deseable introducir franquicias mayores en peores perfiles de riesgo, lo que implicaría establecer, una clasificación de qué perfiles son mejores o peores en cuanto a frecuencia de siniestralidad, lo que, *a priori*, puede resultar más complicado.

Otra forma de penalizar los peores perfiles de riesgo es la aplicación de franquicias

progresivas crecientes que supongan una mayor participación del asegurado en el coste del siniestro a medida que el número de siniestros que este declare sea mayor, es decir, introducir franquicias mayores o más gravosas para el asegurado a medida que el número de siniestros en el periodo de cobertura que el asegurado declare aumente.

En este trabajo se han derivado los estimadores analíticos del valor esperado y varianza de la variable aleatoria siniestralidad agregada condicionados por la introducción de una franquicia absoluta progresiva creciente. Los estimadores suponen una generalización de los estimadores habituales de valor esperado y varianza de la siniestralidad agregada condicionados a franquicia constante; e incluso sin franquicia.

Los resultados de los ejemplos numéricos muestran como a medida que el asegurado o cartera de seguros es peor en cuanto a frecuencia de siniestros – medido por el parámetro λ de la distribución Poisson, por ejemplo – la diferencia en la prima pura a satisfacer es mayor al aplicar franquicias progresivas crecientes que en el caso de franquicias constantes. También se observa – cómo es de esperar – la reducción en la varianza del coste de los siniestros en el caso de franquicias progresivas crecientes respecto al caso de varianzas constantes.

En el caso de observar un asegurado o cartera de seguros con un bajo perfil de riesgo – medido por el parámetro λ de la distribución Poisson, por ejemplo – la diferencia en prima se hace inapreciable desde el punto de vista del asegurado, por lo que para la aseguradora y para el asegurado les resulta indiferente introducir franquicias absolutas progresivas o constantes a estos perfiles de riesgo.

Sin embargo, la introducción de franquicias absolutas progresivas crecientes pone de manifiesto el efecto psicológico que sobre el asegurado puede tener las franquicias: por una parte, el desincentivo a la declaración de siniestros y el incentivo a la compra del seguro por el abaratamiento de la prima. En este caso, para perfiles de riesgo con frecuencia siniestral mayor cabría esperar un desincentivo a la declaración de siniestros, un abaratamiento de la prima para estos asegurados y una reducción en la varianza del coste de los siniestros que se traslada – *ceteris paribus* – a la varianza de la siniestralidad agregada.

Además, la reducción de la varianza del coste de los siniestros al introducir franquicias constantes o progresivas genera menores recargos de seguridad si se emplea la desviación típica como catalizador del recargo de seguridad.

Con distribuciones de frecuencia de siniestros con mayor varianza que la Poisson – en el caso práctico se emplea la distribución Binomial Negativa, cabe esperar que la varianza de la siniestralidad agregada aumente. Este aumento se compensará parcialmente con el decremento de la variabilidad del coste al introducir franquicias absolutas progresivas en lugar de constantes; con el consecuente efecto ya mencionado sobre el recargo de seguridad.

Esta manera de establecer la tarificación, que parte de la Teoría de Riesgo Colectivo, podría ser empleada bajo un esquema de tarificación bajo la Teoría del Riesgo Individual si el valor estimado del número de siniestros fuese estimado para cada asegurado o perfil de riesgo homogéneo mediante un modelo lineal generalizado; lo que no afectaría a la distribución del coste – con o sin franquicia – al ser ambas variables aleatorias, número de siniestros y coste de estos, independientes.

Finalmente, los estimadores derivados de valor esperado y varianza condicionados a franquicias absolutas no constantes son extensibles a otro tipo de franquicias – por ejemplo, aquella en el que el coste del siniestro X_i quede limitado a $X_i = \min.(\text{máx.}(X_i - A_i; 0); M_i - A_i)$ con $M_i > A_i$; cuya aplicación podría realizarse en otros ámbitos tales como el establecimiento de tratados *Excess Loss* de reaseguro.

8. AGRADECIMIENTOS

Este artículo es continuación de los trabajos de Vegas *et al.* 2004 y 2005 sobre franquicias estadísticas y estocásticas magistralmente estructurados por Profesor Dr. Roberto Escuder

Vallés y Profesor Dr. Ángel Vegas Montaner a quienes los autores agradecen el conocimiento adquirido al sistematizar el planteamiento de franquicias constantes.

9. REFERENCIAS

- Bahnemann, D. (2015). *Distributions for actuaries* (CAS Monograph Series, Vol. 2). Casualty Actuarial Society.
- Brown, B. Z., & Schmitz, M. C. (2006). *Study note: Reading on deductibles*. Casualty Actuarial Society.
- Ismail, N. (2011). Deductibles, policy limits, and reinsurance: A case study in Malaysia. *CAS E-Forum*, Winter 2011, 1–23.
- Klugman, S. A., Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (2019). *Loss models: From data to decisions* (5th ed.). Wiley.
- Lee, G. Y. (2017). General insurance deductible ratemaking. *North American Actuarial Journal*, 21(4), 620–638.
- Lee, G. Y., & Frees, E. W. (2016). *General insurance deductible ratemaking with applications to the Local Government Property Insurance Fund* (Research Report). Society of Actuaries.
- Casualty Actuarial Society. (2018). *Study note on truncation and censoring*. <https://thecasoinstitute.org/wp-content/uploads/2018/05/studynote-vF-050218.pdf>
- Vegas Montaner, A., Escuder Vallés, R., & Oliver Raboso, J. (2004). Franquicias estadísticas. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 10, 149–191.
- Vegas Montaner, A., Escuder Vallés, R., & Oliver Raboso, J. (2005). Franquicias estocásticas. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 11, 127–199.
- Werner, G., & Modlin, C. (2016). *Basic ratemaking* (5th ed.). Casualty Actuarial Society.

10. ANEXO A

```
=====
Código simulación R
=====

## Coste Medio

cm          <- 506.15

## Parámetros

lambda      <- 1          #Poisson
theta       <- 1/cm        #Exponencial
meanlog     <- 5.4695      #Lognormal
sdlog       <- 1.2306      #Lognormal
alpha       <- 0.2819      #Gamma
```

```

beta      <- 0.0005 #Gamma
## Truncamiento
K          <- 12
## Franquicia
# Progesiva A_i = 300, 350, 400, 500, 500, ...
A <- sapply(1:K, function(i) {
  if (i == 1) 300 else
  if (i == 2) 350 else
  if (i == 3) 400 else 500
})
# Constante A = 300
# A <- rep(300,K)
# Sin franquicia
# A <- rep(0,K)
## Monte Carlo
R <- 10^6
sim_S <- function() {
  N <- rpois(1, lambda)
  if (N == 0) return(0)
  YN <- rgamma(N , shape = alpha , rate = beta)
  # YN <- rlnorm(N, meanlog = meanlog ,sdlog = sdlog)
  # YN <- rexp(N, rate=1/cm)
  Ai <- A[1:N]
  Xi <- pmax(YN - Ai, 0)
  sum(Xi)
}
Svals <- replicate(R, sim_S())
ES_sim <- mean(Svals) ; ES_sim
StdS_sim <- sqrt(var(Svals)); StdS_sim

```