Anales del Instituto de Actuarios Españoles, 4ª época, 27, 2021/113-133

FINANCIAL-TAX RETURN OF SINGLE-PREMIUM DEFERRED (TEMPORARY OR LIFE) ANNUITIES

RENTABILIDAD FINANCIERO-FISCAL DE LAS RENTAS DE JUBILACIÓN TEMPORALES O VITALICIAS ASEGURADAS Y CONTRATADAS A PRIMA ÚNICA

María José Pérez-Fructuoso[1*], Antonio Alegre Escolano[2]

[1] Departamento de Economía y Administración de Empresas. Universidad a Distancia de Madrid (UDIMA)
[2] Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial. Facultad d'Economia i Empresa. Universitat de Barcelona

Fecha de recepción: 24/05/2021
Fecha de aceptación: 21/06/2021

Abstract

This works intends to determine the insured's financial and fiscal payoff in deferred life annuities. We will obtain the respective analytical expressions of the operation's payoff probability distribution, of the expected payoff, and of other additional risk parameters to be used. We attach the numerical application of a particular case. This study shows the applicability of its results, and thus allows the insured to make his or her decisions with the maximum information within random environments.

Keywords: Probability distribution of real return; expected return; risk indicators based on the probability distribution of the real return; deferred life annuity.

Resumen

[1] mariajose.perez@udima.es
[*] Autor de correspondencia (mariajose.perez@udima.es)
[2] aalegre@ub.edu

DOI 10.26360/2021_5

El objetivo de este trabajo es determinar la rentabilidad financiero-fiscal que puede obtener un asegurado al contratar una renta de supervivencia diferida y vitalicia. Se obtienen las expresiones analíticas de la distribución de probabilidad de la rentabilidad real de la operación, de la rentabilidad esperada y de los indicadores de riesgo que proponemos utilizar junto a esta rentabilidad. Se desarrolla una aplicación numérica de un caso particular de forma que el estudio realizado muestra la aplicabilidad de los resultados obtenidos permitiendo al asegurado tomar sus decisiones en ambiente aleatorio con la máxima información.

Palabras Clave: Distribución de probabilidad de la rentabilidad real; rentabilidad esperada; índices de riesgo basados en la distribución de probabilidad de la rentabilidad real; renta vitalicia de jubilación.

1. Introducción

La adaptación de la legislación española en materia de seguros (Real Decreto 1060/2015, de 20 de noviembre, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras) a la Directiva Europea de Solvencia II (Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 25 de noviembre de 2009, sobre el seguro de vida, el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio), da lugar la obligación de informar a los asegurados de la rentabilidad que esperan obtener de las operaciones de seguros que contratan. Dicha *rentabilidad esperada* aspira a ser una herramienta que, igual que la Tasa Anual Equivalente (TAE) en el sector financiero, posibilite la comparación entre las diferentes operaciones de seguros existentes en el mercado asegurador aumentando de esa forma su transparencia (Devesa, *et al*. 2016). Sin embargo, su regulación no establece la ley financiera de capitalización con la que realizar su cálculo, ni tiene en cuenta los gastos de gestión de la entidad aseguradora, que sí se incluyen en el cálculo de la TAE (Alegre y Sáez, 1991).

Diversos autores han abordado el cálculo de la rentabilidad esperada en las operaciones actuariales. Devesa, *et al*. (2013) calculan la rentabilidad financiero-actuarial-fiscal, como el tipo de interés derivado de la ley financiera de capitalización compuesta, que, a partir de una tabla de mortalidad, se obtiene igualando el valor actuarial de las primas con el de las indemnizaciones, considerando además las características comerciales de la operación. Dicha rentabilidad se calcula en dos momentos diferentes, antes de empezar la operación y en el momento actual de la misma, con el objetivo de analizar los cambios que en ella se presentan por la modificación en los flujos, probabilidad y rentabilidades futuras. Devesa, *et al*. (2016), determinan la rentabilidad esperada como el tipo de interés anual obtenido al igualar los valores actuales de las prestaciones esperadas con los pagos esperados de primas. De esta operación se obtiene una función implícita que debe resolverse por métodos iterativos y cuyos resultados dependen del tipo de prima de la operación, de las tablas de mortalidad empleadas y de la estructura de gastos que aplique la entidad aseguradora. Finalmente, Moreno, Trigo, Gómez y Escobar (2017) definen la rentabilidad esperada como una variable aleatoria y desarrollan su cálculo de dos formas alternativas; como esperanza matemática de la variable aleatoria rentabilidad de la operación y como tanto al que se igualan los valores actuales medios esperados de las prestaciones y las primas.

Sin embargo, para determinar la rentabilidad esperada de un seguro de vida es necesario utilizar métodos que consideren la distribución de probabilidad de la contingencia cubierta porque en estas operaciones existe una componente de riesgo relacionada con la supervivencia o el fallecimiento del asegurado que las convierte en estocásticas. En este trabajo calculamos la rentabilidad, real y esperada, de un seguro de ahorro complejo, denominado renta de supervivencia, en el que se establece el pago de una renta prepagable, si el asegurado de edad actual x, llega con vida a cumplir $x+m$ años, siendo m el diferimiento de la operación. Para ello, determinaremos la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *tanto efectivo anual de rendimiento* que nos permitirá obtener los valores de las rentabilidades reales en cada periodo, según se produzca o no la contingencia cubierta en el contrato. La rentabilidad esperada, por su parte, se determinará definiendo la variable aleatoria *valor actual financiero del beneficio del producto* y a partir de su distribución de probabilidad, dicha rentabilidad será la que resulte de igualar a cero su valor esperado. Ambas rentabilidades se obtendrán bajo diferentes escenarios de gastos, desgravaciones fiscales e impuestos (Pérez-Fructuoso y Alegre, 2018 y 2019). Adicionalmente, a partir del análisis de estas variables aleatorias calcularemos unos índices de riesgo que medirán la probabilidad de no perder con la operación y la confianza del asegurado en obtener una rentabilidad real como mínimo superior al rendimiento esperado calculado.

Los diferentes valores de rentabilidad obtenidos, así como los índices de riesgo calculados, aportarán los elementos necesarios para la toma de decisiones por parte del asegurado en este tipo de operaciones, a diferencia de lo que sucedía en las operaciones financieras ciertas en las que no existe la componente de aleatoriedad.

La estructura del artículo es la siguiente. Tras esta introducción, en la sección 2 se presenta el marco teórico general sobre el que se va a realizar el estudio. La Sección 3 desarrolla de forma teórica y práctica las expresiones que permiten obtener los valores de la variable tipo de interés anual efectivo y la rentabilidad esperada de una operación de renta de supervivencia a prima única bajo los siguientes supuestos: prima pura, prima comercial, prima comercial con desgravación fiscal y pago de impuestos sobre el capital obtenido y prima comercial con pago de impuestos sobre los rendimientos obtenidos de la operación. En la Sección 4 se presentan y discuten los resultados obtenidos de la aplicación numérica realizada para cada uno de los casos analizados. Finalmente, la Sección 5 expone las principales conclusiones alcanzadas con el estudio.

2. Marco teórico

En las operaciones financieras, la rentabilidad es el tipo de interés que resulta de establecer la equivalencia financiera entre el capital aportado por el inversor y el capital recibido como contraprestación por dicha inversión (Navarro, 2019). Sin embargo, en las operaciones actuariales sobre la vida, dicha rentabilidad no puede obtenerse aplicando la misma metodología puesto que son operaciones financiero-aleatorias en las que se desconoce la cuantía total de primas a pagar, la cuantía de la prestación, el momento en el que se va a producir el pago o si finalmente se producirá o no el pago de la prestación. Todas estas magnitudes están asociadas a la contingencia de supervivencia o fallecimiento de una persona o de un grupo de personas cubiertas en la operación (Moreno et al, 2017) por lo que la rentabilidad en este caso dependerá de la distribución de probabilidad de la contingencia cubierta y su cálculo exigirá el uso de métodos estadísticos de variables aleatorias.

Como consecuencia de ello, para desarrollar el artículo, se definen en primer lugar las variables aleatorias *tanto efectivo anual de rendimiento o rentabilidad real y valor actual del beneficio del producto* y se determinan las distribuciones de probabilidad asociadas a cada una de ellas. En el primer caso, la distribución de probabilidad del *tanto efectivo anual de rendimiento* permitirá obtener los diferentes valores de dicha variable además de unos índices de riesgo, que completan la información proporcionada por las rentabilidades calculadas, al informar sobre la probabilidad de pérdida en la operación y de la probabilidad de obtener una rentabilidad real superior a la esperada, según ocurra o no la contingencia prevista y el momento en el que dicha contingencia se produzca. Sin embargo, al utilizar el interés compuesto para valorar financieramente estas operaciones, cuya periodicidad se extiende al medio o largo plazo, la transformación no será lineal y, por consiguiente, el rendimiento medio o esperado no coincidirá con la esperanza matemática de la variable aleatoria *tanto efectivo anual de rendimiento*. Como consecuencia de ello, se definirá la rentabilidad esperada de una operación de seguros, como el tipo de interés efectivo anual al que se iguala el valor actual actuarial de las prestaciones y contraprestaciones de la operación o, dicho de otro modo, el tipo de interés al que se anula la esperanza matemática del valor actual del beneficio (o, alternativamente, pérdida) para el asegurado del producto.

En este trabajo se obtiene el tipo de interés efectivo anual y la rentabilidad esperada de una operación de seguros de ahorro compleja denominada *renta de supervivencia*. La prestación de esta operación será el pago de una renta prepagable y vitalicia, de función de cuantía $u(t) = h(\alpha)$ unidades monetarias, si el asegurado, de edad actual *x* años, vive a la edad *x*+*m* (Gerber, 1997). La aportación por su parte estará formada por el pago de una prima única al inicio de la operación.

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria *tanto efectivo anual de rendimiento o rentabilidad real* para una operación de renta de supervivencia diferida *m años* y temporal *n* años*,* vendrá dada por la siguiente expresión,

$$\begin{array}{cc}
\underline{Valores\ de\ \tilde{\imath}} & \underline{Probabilidades} \\
i_0 & /_{m}q_x \\
i_1 & {}_{m/1}q_x \\
i_2 & {}_{m+1/1}q_x \\
i_3 & {}_{m+2/1}q_x \\
\vdots & \vdots \\
i_{n-1} & {}_{m+n-2/1}q_x \\
i_n & \underline{{}_{m+n-1}p_x} \\
 & 1
\end{array} \qquad (1)$$

donde las distintas rentabilidades i_j se obtendrán igualando el valor actual financiero de las prestaciones y contraprestaciones de la operación en cada periodo:

$$VA_{i_j}(prestaciones) = VA_{i_j}(contraprestaciones) \quad \forall j \in \{0,1,2,\ldots,n\} \qquad (2)$$

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria *valor actual del beneficio del producto* que nos permitirá calcular la rentabilidad esperada, i^*, vendrá dada por la siguiente expresión,

$\underline{Valores\ de\ \tilde{B}}$	$\underline{Probabilidades}$
$-P_0$	${}_{/1}q_x$
$-\underset{[u_P(t)]}{(V\ddot{a})_{\overline{2}\lvert i^*}}$	${}_{1/1}q_x$
$-\underset{[u_P(t)]}{(V\ddot{a})_{\overline{3}\lvert i^*}}$	${}_{2/1}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$-\underset{[u_P(t)]}{(V\ddot{a})_{\overline{k}\lvert i^*}}$	${}_{k-1/1}q_x$
$-\underset{[u_P(t)]}{(V\ddot{a})_{\overline{k}\lvert i^*}}$	${}_{k/1}q_x$
$-\underset{[u_P(t)]}{(V\ddot{a})_{\overline{k}\lvert i^*}}$	${}_{k+1/1}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$-\underset{[u_P(t)]}{(V\ddot{a})_{\overline{k}\lvert i^*}}$	${}_{m-1/1}q_x$
$-\underset{[u_P(t)]}{(V\ddot{a})_{\overline{k}\lvert i^*}} + \alpha_0 \cdot (1+i^*)^{-m}$	${}_{m/1}q_x$
$-\underset{[u_P(t)]}{(V\ddot{a})_{\overline{k}\lvert i^*}} + \underset{[u_\alpha(t)]}{{}_{/m}(V\ddot{a})_{\overline{2}\lvert i^*}}$	${}_{m+1/1}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$-\underset{[u_P(t)]}{(V\ddot{a})_{\overline{k}\lvert i^*}} + \underset{[u_\alpha(t)]}{{}_{/m}(V\ddot{a})_{\overline{n-1}\lvert i^*}}$	${}_{m+n-2/1}q_x$
$-\underset{[u_P(t)]}{(V\ddot{a})_{\overline{k}\lvert i^*}} + \underset{[u_\alpha(t)]}{{}_{/m}(V\ddot{a})_{\overline{n}\lvert i^*}}$	$\underline{{}_{m+n-1}p_x}$
	1

(3)

donde:

- k es el número de primas (en este trabajo $k=1$), m el diferimiento de la renta, con $k<m,$ y n la temporalidad de la renta.
- $\underset{[u_P(t)]}{(V\ddot{a})_{\overline{k}\lvert i^*}}$ es el valor actual de una renta inmediata, prepagable, temporal k años, valorada al tipo de interés i^* o rentabilidad esperada, de cuantía inicial P_0, con $u_P(t)$ la función de cuantía de la renta cuya forma dependerá de cómo se establezca el pago de las primas por parte del asegurado, pudiendo ser constantes o variables según una función determinada (lineal, geométrica, etc.)

- $/_m(V\ddot{a})_{\overline{n|}i^*}\,[u_\alpha(t)]$ es el valor actual de una renta diferida *m* años, prepagable, temporal *n* años, valorada al tipo de interés *i** o rentabilidad esperada, de cuantía inicial α_0, con $u_\alpha(t)$ la función de cuantía correspondiente al pago de la renta en caso de supervivencia del asegurado cuya variación dependerá de la forma en que se establezca el pago de dichas cuantías.
- $_{s/1}q_x = \frac{l_{x+s} - l_{x+s+1}}{l_x} \quad \forall s = 1,2,\dots,k,\dots,m+n-2$ es la probabilidad de fallecimiento, diferida *s* años y temporal 1 año, cuyo cálculo se realiza a partir del número de personas vivas a cada edad, l_x.
- $_{m+n-1}p_x = \frac{l_{x+m+n-1}}{l_x}$ es la probabilidad de que una persona de edad *x* llegue viva a cumplir la edad *x*+*m*+*n*-1, calculada a partir del número de personas vivas a cada edad, l_x. En este caso, como la renta es diferida m y prepagable, el primer término se hace efectivo en *m* y el último en *m*+*n*-1 de forma que su probabilidad asociada es $_{m+n-1}p_x$.

3. Determinación de las rentabilidades real y esperada en una renta de supervivencia diferida *m* y temporal *n* a prima única. Estudio de los diferentes supuestos en función del tipo de prima.

A continuación, desarrollamos el cálculo de la distribución de la rentabilidad real y la rentabilidad esperada de una renta de supervivencia diferida *m* años, temporal *n* años, prepagable, de términos variables $\{\alpha_t\}_{t=m,m+1,\dots,m+n-1}$ y cuya contratación se realiza mediante el pago de una prima pura única de cuantía Π unidades monetarias bajo los siguientes supuestos: 1) prima pura, 2) prima comercial, 3) prima comercial con desgravación fiscal y pago de impuestos sobre el capital obtenido y 4) prima comercial con pago de impuestos sobre los rendimientos obtenidos de la operación. Además, se van a determinar unos indicadores de riesgo que informarán acerca de la probabilidad de pérdida y de la probabilidad de obtener una rentabilidad real superior a la esperada, según ocurra o no la contingencia prevista y el momento en el que dicha contingencia se produzca.

3.1. Renta de supervivencia diferida *m* y temporal *n* a prima pura única (PPU)

Si la contratación de la renta de supervivencia se realiza mediante el pago de una prima pura única de cuantía Π unidades monetarias, la ecuación de equilibrio financiero-actuarial en el origen de la operación, según la cual el valor actual actuarial de las contraprestaciones debe ser igual al valor actual actuarial de las prestaciones (Olivieri y Pitacco, 2015), viene dada por la siguiente expresión,

$$\Pi = \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i)^{-t} \cdot \ {}_t p_x \tag{4}$$

donde i es el tipo de interés técnico de la operación[3].

Definimos la variable aleatoria *tipo de interés efectivo anual* o *rentabilidad real* de la operación, $\tilde{\imath}$, cuya distribución de probabilidad es:

$$\begin{array}{cc} \underline{\tilde{\imath}} & \underline{Probabilidades} \\ i_0 = -1 & {}_{/m}q_x \\ i_1 & {}_{m/1}q_x \\ i_2 & {}_{m+1/1}q_x \\ i_3 & {}_{m+2/1}q_x \\ \vdots & \vdots \\ i_{n-1} & {}_{m+n-2/1}q_x \\ i_n & \underline{{}_{m+n-1}p_x} \\ & 1 \end{array} \tag{5}$$

Resulta evidente que, si el asegurado fallece antes de que finalicen los m años del diferimiento, la rentabilidad de la operación es $i_0 = -1$, la pérdida máxima, puesto que pierde la prima pagada y no recibe ninguna prestación. En otro caso, si el asegurado llega con vida a la edad x+m, la rentabilidad i_j,

---

[3] En todo el trabajo utilizaremos sumas y no sumatorios de forma que $\sum_{t=0}^{n} X_t = X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1}$, esto es, la suma desde el extremo inferior hasta el anterior al extremo superior. En forma de sumatorio se expresa como sigue:

$$\sum\nolimits_{t=0}^{n} = \sum_{t=0}^{n-1}$$

La utilización del operador suma en lugar del sumatorio tiene ventajas apreciables, ya que unifica fácilmente el cálculo discreto con el continuo. Así, la suma tiene la propiedad de escindibilidad como ocurre con la integral, siendo para $m<n$:

$$\sum\nolimits_{t=0}^{n} X_t = \sum\nolimits_{t=0}^{m} X_t + \sum\nolimits_{t=m}^{n} X_t$$

Esta propiedad es muy importante para el tratamiento de las rentas discretas, de forma que, por ejemplo, para las rentas unitarias y prepagables, resulta,

$${}_{/n}\ddot{a}_x = {}_{/m}\ddot{a}_x + {}_{m/n-m}\ddot{a}_x$$

o, equivalentemente:

$$\sum\nolimits_{t=0}^{n} {}_t p_x \cdot (1+i)^{-t} = \sum\nolimits_{t=0}^{m} {}_t p_x \cdot (1+i)^{-t} + \sum\nolimits_{t=m}^{n} {}_t p_x \cdot (1+i)^{-t}$$

con $j \in \{1,2,\dots,n\}$, será la resultante de igualar, en cada periodo, el valor de la prima única con el valor actual de los términos de la renta recibidos, esto es,

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\tilde{\imath}} & \underline{Probabilidades} & \underline{Cálculo} \\
i_0 & {}_{/m}q_x & -1 \\
i_1 & {}_{m/1}q_x & \Pi = \alpha_m \cdot (1+i_1)^{-m} \\
i_2 & {}_{m+1/1}q_x & \Pi = \sum_{t=m}^{m+2} \alpha_t \cdot (1+i_2)^{-t} \\
i_3 & {}_{m+2/1}q_x & \Pi = \sum_{t=m}^{m+3} \alpha_t \cdot (1+i_3)^{-t} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
i_{n-1} & {}_{m+n-2/1}q_x & \Pi = \sum_{t=m}^{m+n-1} \alpha_t \cdot (1+i_{n-1})^{-t} \\
i_n & \underline{{}_{m+n-1}p_x} & \Pi = \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i_n)^{-t} \\
 & 1 &
\end{array} \tag{6}$$

donde la rentabilidad i_1, resulta directamente a partir de la siguiente expresión,

$$(1+i_1)^{-m} = \frac{\alpha_m}{\Pi} \Rightarrow i_1 = \left(\frac{\alpha_m}{\Pi}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \tag{7}$$

y con $i_n > i$ ya que $0 <_t p_x < 1$. Las rentabilidades $i_2 \dots i_n$ no pueden calcularse directamente despejando, por lo que resulta preciso utilizar métodos iterativos para obtenerlas.

Para calcular la rentabilidad esperada, *i**, se define la variable aleatoria *función valor actual del beneficio del producto*, cuya distribución de probabilidad resulta:

$$\begin{array}{cc}
\underline{\tilde{B}} & \underline{Probabilidades} \\
-\Pi & {}_{/m}q_x \\
-\Pi + \alpha_m \cdot (1+i^*)^{-m} & {}_{m/1}q_x \\
-\Pi + \sum_{t=m}^{m+2} \alpha_t \cdot (1+i^*)^{-t} & {}_{m+1/1}q_x \\
-\Pi + \sum_{t=m}^{m+3} \alpha_t \cdot (1+i^*)^{-t} & {}_{m+2/1}q_x \\
\vdots & \vdots \\
-\Pi + \sum_{t=m}^{m+n-1} \alpha_t \cdot (1+i_{n-1})^{-t} & {}_{m+n-2/1}q_x \\
-\Pi + \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i_n)^{-t} & \underline{{}_{m+n-1}p_x} \\
 & 1
\end{array} \tag{8}$$

El valor de *i** se obtiene haciendo cero el valor esperado de la variable aleatoria $\tilde{B}$, $E(\tilde{B}) = 0$, esto es:

$$\Pi = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{t=m}^{m+j} \alpha_t \cdot (1+i^*)^{-t}\right) \cdot \ {}_{m+j-1/1}q_x + \left(\sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i^*)^{-t}\right) \cdot \ {}_{m+n-1}p_x \tag{9}$$

Operando en las sumas de la expresión (9), dicha ecuación resulta:

$$\Pi = \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i^*)^{-t} \cdot \sum_{j=t-m+1}^{n} \ {}_{m+j-1/1}q_x + \left(\sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i^*)^{-t}\right) \cdot \ {}_{m+n-1}p_x \tag{10}$$

Y considerando que,

$$\sum_{j=t-m+1}^{n} \ {}_{m+j-1/1}q_x = \ {}_{t}p_x - \ {}_{m+n-1}p_x \tag{11}$$

la ecuación que permite obtener la rentabilidad esperada de la renta de supervivencia analizada, mediante un proceso iterativo, es:

$$\Pi = \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i^*)^{-t} \cdot \ {}_{t}p_x \tag{12}$$

Además, substituyendo Π por su valor dado en la ecuación (4) se observa fácilmente que la rentabilidad esperada en este caso coincide con el tipo de interés técnico de la operación, $i^*=i$.

Como primer indicador de riesgo, calculamos la probabilidad $p[\tilde{\imath} \geq 0]$, que informa acerca de que la rentabilidad real de la operación de supervivencia contratada no sea negativa y se obtendrá como la suma de todas las probabilidades diferidas de fallecimiento a partir del primer valor $i_j \geq 0$.

El segundo indicador de riesgo viene dado por la probabilidad $p[\tilde{\imath} \geq i^*]$ que indica la confianza que tiene el asegurado en obtener una rentabilidad real que sea como mínimo la rentabilidad esperada y se obtiene sumando las probabilidades diferidas de fallecimiento a partir del pago del término de la renta, en el que el tipo de interés real obtenido supera por primera vez al tipo de interés esperado, y hasta el final de la operación.

3.2. Renta de supervivencia diferida *m* y temporal *n* a prima comercial única (PCU)

La prima comercial se define como la prima pura más los componentes económico - comerciales del seguro. Estos componentes son los gastos de gestión interna, referidos a los gastos de administración (nóminas, ordenadores, amortizaciones, material de oficina...), los gastos de gestión externa, tales como los gastos de producción, cobro y mantenimiento de cartera (gastos de mantenimiento de la red comercial) y el margen de beneficios de la compañía. Dicha prima se calcula, a partir de la prima pura, añadiendo un recargo por gastos de gestión y el margen de beneficios,

$$\Pi' = \Pi \cdot (1 + g) \qquad (13)$$

siendo $0 \leq g \leq 1$ un porcentaje sobre la prima pura.

Se deduce de esta definición que el planteamiento de este caso será idéntico al de la prima pura en cuanto a obtención de la rentabilidad máxima y de la rentabilidad esperada, simplemente substituyendo Π por la ecuación (13).

Entonces, la variable aleatoria *tipo de interés anual efectivo o rentabilidad real* en este caso, $\tilde{\imath}'$, tendrá la misma distribución de probabilidad, y por tanto las mismas probabilidades de ocurrencia que en el caso de la prima pura dada por la expresión (5):

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\tilde{\imath}'} & \underline{Probabilidades} & \underline{Cálculo} \\
i'_0 & /_m q_x & -1 \\
i'_1 & {}_{m/1}q_x & \Pi \cdot (1+g) = \alpha_m \cdot (1+i'_1)^{-m} \\
i'_2 & {}_{m+1/1}q_x & \Pi \cdot (1+g) = \sum_{t=m}^{m+2} \alpha_t \cdot (1+i'_2)^{-t} \\
i'_3 & {}_{m+2/1}q_x & \Pi \cdot (1+g) = \sum_{t=m}^{m+3} \alpha_t \cdot (1+i'_3)^{-t} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
i'_{n-1} & {}_{m+n-2/1}q_x & \Pi \cdot (1+g) = \sum_{t=m}^{m+n-1} \alpha_t \cdot (1+i'_{n-1})^{-t} \\
i'_n & \underline{{}_{m+n-1}p_x} & \Pi \cdot (1+g) = \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i'_n)^{-t} \\
 & 1 &
\end{array}$$

(14)

Sin embargo, los valores de la variable, calculados a partir de la ecuación de equilibrio financiero-actuarial en el origen de la operación en cada periodo, serán todos menores: como el primer miembro de la igualdad se ha multiplicado por $(1 + g) > 1$, el tanto i'_n , y en general el resto de tipos de interés, tendrán que ser menores para obtener un valor actual mayor.

Por su parte, i'_1 cuando la operación se contrata a prima comercial, vendrá dado por la siguiente expresión,

$$i'_1 = \left(\frac{\alpha_m}{\Pi \cdot (1+g)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \qquad (15)$$

y el resto de rentabilidades, $i'_2 \dots i'_n$, se obtienen aplicando procesos de cálculo iterativo.

La rentabilidad esperada se obtendrá a partir de la variable aleatoria *valor actual del beneficio del producto*, en la que se substituye Π por $\Pi' = \Pi \cdot (1+g)$. Ello resulta en un planteamiento idéntico al del caso de la prima pura que nos lleva a la siguiente ecuación,

$$\Pi \cdot (1+g) = \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i^*)^{-t} \cdot \quad {}_t p_x \tag{16}$$

que permite obtener el valor de la rentabilidad esperada mediante un proceso iterativo.

En la ecuación (16) al ser $g > 0$, el primer miembro será mayor que el equivalente en la ecuación (12) correspondiente al cálculo de la rentabilidad esperada de la renta de supervivencia contratada a prima pura, por tanto, tendremos que $i^*<i$.

En cuanto a los indicadores de riesgo en este caso, el primero de ello viene dado por la probabilidad $p[\tilde{\imath}' > 0]$ que cumple la relación $p[\tilde{\imath}' > 0] \leq p[\tilde{\imath} > 0]$ al ser $g > 0$.

El segundo, igual que en el primer supuesto, será $p[\tilde{\imath}' \geq i^*]$.

3.3. Renta de supervivencia diferida *m*, temporal *n*, a prima comercial única con desgravación fiscal y pago de impuestos sobre el capital (PCU con β y δ)

En este caso, la operación actuarial consiste en el pago de una prima comercial única neta, de importe $\Pi \cdot (1+g) \cdot (1-\beta)$ unidades monetarias, siendo $0 \leq g \leq 1$ un porcentaje sobre la prima pura y $0 \leq \beta \leq 1$ el porcentaje de prima que el partícipe puede deducir de la cuota del IRPF en el momento $t = 0$ o desgravación fiscal. Como contrapartida, el asegurado, si vive a la edad $x + m$, recibe una renta de $\{\alpha_t\}_{t=m,m+1,\ldots,m+n-1}$ unidades monetarias durante n periodos y afronta el pago de unos impuestos sobre el capital recibido y, por tanto, en cada periodo, de la forma, $\{\alpha_t \cdot (1-\delta)\}_{t=m,m+1,\ldots,m+n-1}$, siendo $0 \leq \delta \leq 1$ el tipo impositivo constante pagadero en el momento del cobro de cada uno de los términos de la renta, verificándose que $\beta \geq \delta$ ya que se supone que, normalmente, el marginal del impuesto en el momento de cobrar la renta será menor que cuando el asegurado esté pagando primas (en cualquier caso, es una restricción no necesaria que no altera los resultados del modelo).

Los valores de la variable aleatoria *tanto de interés efectivo anual* de la operación, $\tilde{\imath}''$, se obtienen a partir de la siguiente expresión,

$\tilde{\imath}''$	*Probabilidades*	*Cálculo*
i''_0	$/_m q_x$	-1
i''_1	$_{m/1}q_x$	$\Pi\cdot(1+g)\cdot(1-\beta)=\alpha_m\cdot(1-\delta)\cdot(1+i''_1)^{-m}$
i''_2	$_{m+1/1}q_x$	$\Pi\cdot(1+g)\cdot(1-\beta)=(1-\delta)\cdot\sum_{t=m}^{m+2}\alpha_t\cdot(1+i''_2)^{-t}$
i''_3	$_{m+2/1}q_x$	$\Pi\cdot(1+g)\cdot(1-\beta)=(1-\delta)\cdot\sum_{t=m}^{m+3}\alpha_t\cdot(1+i''_3)^{-t}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i''_{n-1}	$_{m+n-2/1}q_x$	$\Pi\cdot(1+g)\cdot(1-\beta)=(1-\delta)\cdot\sum_{t=m}^{m+n-1}\alpha_t\cdot(1+i''_{n-1})^{-t}$
i''_n	$_{m+n-1}p_x$	$\Pi\cdot(1+g)\cdot(1-\beta)=(1-\delta)\cdot\sum_{t=m}^{m+n}\alpha_t\cdot(1+i''_n)^{-t}$
	1	

(17)

resultando i''_1 en este caso:

$$i''_1=\left(\frac{\alpha_m}{\frac{(1+g)\cdot(1-\beta)}{1-\delta}\cdot\Pi}\right)^{\frac{1}{m}}-1 \tag{18}$$

(como en los supuestos anteriores, $i''_2 \dots i''_n$ se obtienen aplicando métodos iterativos).

La rentabilidad esperada se obtendrá, por iteración, a partir de la siguiente ecuación:

$$\Pi\cdot(1+g)\cdot(1-\beta)=(1-\delta)\cdot\sum_{t=m}^{m+n}\alpha_t\cdot(1+i^*)^{-t}\cdot {}_tp_x \tag{19}$$

Como en los supuestos anteriores, los índices de riesgo serán la probabilidad de que la rentabilidad de la operación contratada sea negativa $p[\tilde{\imath}''>0]$ y la confianza del asegurado en obtener una rentabilidad real superior a la rentabilidad esperada, $p[\tilde{\imath}''\geq i^*]$.

3.4. Renta de supervivencia diferida *m* y temporal *n* a prima comercial única con pago de impuestos sobre los rendimientos (PCU con δ)

Definimos el valor actual actuarial de la renta de supervivencia diferida m años, vitalicia, prepagable y de términos variables $\{\alpha_t\}_{t=m,m+1,\dots,m+n-1}$, a partir de la siguiente expresión,

$$\Pi=\sum_{t=m}^{m+n}\alpha_t\cdot(1+i_n)^{-t}\cdot {}_tp_x=\sum_{t=m}^{m+n}\Pi_t \tag{20}$$

donde Π_t es la prima pura única que se paga en $t = 0$ por el capital diferido de cuantía α_t, que es el término de la renta en cada periodo.

Por esta operación, el asegurado, en el momento del cobro de cada uno de los términos de la prestación, afronta el pago de unos impuestos por los rendimientos percibidos, definidos como el capital obtenido menos la prima pagada, $(\alpha_t - \Pi_t) \cdot \delta$, siendo $0 \leq \delta \leq 1$ constante, de forma que el término variable neto de la renta resulta:

$$\alpha_t^N = \alpha_t - (\alpha_t - \Pi_t) \cdot \delta = \alpha_t \cdot (1 - \delta) + \alpha_t \cdot (1 + i_n)^{-t} \cdot \ {}_t p_x \cdot \delta =$$
$$= \alpha_t \cdot (1 - \delta + (1 + i_n)^{-t} \cdot \ {}_t p_x) = \alpha_t \cdot (1 - (1 - (1 + i_n)^{-t} \cdot \ {}_t p_x) \cdot \delta) \quad (21)$$

Si la operación se contrata a prima comercial, los diferentes valores de la variable aleatoria *tanto de interés efectivo anual*, $\tilde{\imath}'''$, se obtienen a partir de la siguiente expresión,

$\tilde{\imath}'''$	$Probabilidades$	$Cálculo$
i_0'''	${}_{/m}q_x$	-1
i_1'''	${}_{m/1}q_x$	$\Pi \cdot (1 + g) = \alpha_m^N \cdot (1 + i_1''')^{-m}$
i_2'''	${}_{m+1/1}q_x$	$\Pi \cdot (1 + g) = \sum_{t=m}^{m+1} \alpha_t^N \cdot (1 + i_2''')^{-t}$
i_3'''	${}_{m+2/1}q_x$	$\Pi \cdot (1 + g) = \sum_{t=m}^{m+2} \alpha_t^N \cdot (1 + i_3''')^{-t}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i_{n-1}'''	${}_{m+n-2/1}q_x$	$\Pi \cdot (1 + g) = \sum_{t=m}^{m+n-2} \alpha_t^N \cdot (1 + i_{n-1}''')^{-t}$
i_n'''	${}_{m+n-1}p_x$	$\Pi \cdot (1 + g) = \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t^N \cdot (1 + i_n''')^{-t}$
	1	

(22)

donde i_1''' resulta:

$$i_1''' = \left(\frac{\alpha_m^N}{\Pi \cdot (1+g)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \quad (23)$$

La ecuación que permite obtener la rentabilidad esperada en este caso es,

$$\Pi \cdot (1 + g) = \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t^N \cdot (1 + i^*)^{-t} \cdot \ {}_t p_x \quad (24)$$

Finalmente, el indicador de riesgo relacionado con la rentabilidad real será la probabilidad de que dicha rentabilidad sea negativa, $p[\tilde{\imath}''' > 0]$ y el indicador de riesgo, la probabilidad de que la rentabilidad real sea superior a la esperada, esto es, $p[\tilde{\imath}''' > i^*]$.

4. Aplicación numérica

Para llevar a cabo el análisis empírico de los modelos desarrollados en el epígrafe anterior se han programado las fórmulas obtenidas utilizando el programa R-Studio y se han realizado diferentes simulaciones estableciendo distintas hipótesis sobre los parámetros que en dichas fórmulas intervienen.

Las hipótesis realizadas son las siguientes: se considera un asegurado de edad actual 40 años, que contrata una operación actuarial consistente en el pago de una unidad monetaria al inicio de la operación a cambio de recibir a partir de los 65 años (es decir, la operación está diferida 25 años, m=25), una renta de supervivencia prepagable y vitalicia[4], de cuantía constante igual a α. El tipo de interés técnico de la operación se establece en el 1,09% o $i = 0{,}0109$, y las tablas de mortalidad utilizadas para realizar los cálculos son las PASEM 2010. Si la operación se contrata a prima comercial, en el precio del seguro se cargan al asegurado unos gastos de gestión interna y externa y el margen de beneficios definidos como un g=5% sobre la prima pura. Finalmente, para analizar el efecto de la introducción de impuestos en la renta de supervivencia contratada a prima comercial, se introducirá un tipo impositivo inicial o desgravación fiscal del $\beta = 30\%$ y un tipo impositivo final sobre los rendimientos del $\delta = 20\%$.

Bajo estos supuestos, la rentabilidad real o tipo de interés efectivo anual de la operación de la renta de supervivencia, en cada periodo, cuando la prima pagada, pura y comercial, es única, y considerando los diferentes escenarios impositivos, toma los siguientes valores:

[4] Se considera que la renta vitalicia es un caso particular de la renta temporal, ya que el infinito actuarial es finito, en la que $n = \omega - (x + m)$.

Tabla 1
Rentabilidad Real de la Renta de Supervivencia Prima Única

Edad	PPU	PCU	PCU con β y δ	PCU con δ	Probabilidad diferida de fallecimiento
65	-1	-1	-1	-1	0,134577129
66	-0,08735106	-0,089130455	-0,084252252	-0,091692914	0,010993467
67	-0,060488764	-0,062318718	-0,057377687	-0,063138804	0,012012423
68	-0,04456592	-0,046364537	-0,041470807	-0,047286246	0,01319562
69	-0,033337872	-0,035071741	-0,030230978	-0,036056455	0,014562786
70	-0,024692561	-0,026449539	-0,021633448	-0,027481927	0,016135942
71	-0,017769097	-0,019504912	-0,014747279	-0,020591315	0,017934818
72	-0,012059303	-0,013760406	-0,009063083	-0,014899671	0,019986951
73	-0,007199075	-0,008897847	-0,004242802	-0,010096104	0,022326678
74	-0,003027176	-0,004702377	-0,000117889	-0,005953538	0,024978031
75	0,000581744	-0,001070238	0,003459555	-0,002363478	0,027962636
76	0,003754401	0,002123032	0,00659692	0,000765576	0,031276566
77	0,006562737	0,004951267	0,009378383	0,003537908	0,034890668
78	0,009067706	0,007473531	0,011855276	0,006003005	0,038731947
79	0,011320877	0,009737594	0,014085439	0,008207139	0,042680498
80	0,013349268	0,01178705	0,016072112	0,010187537	0,046540982
81	0,015183484	0,01364124	0,017869621	0,011983147	0,047556282
82	0,016857724	0,015325394	0,019518963	0,013608039	0,047994325
83	0,01837082	0,016860535	0,020964709	0,015083862	0,047751686
84	0,019755247	0,018271634	0,022334408	0,016428882	0,046765095
85	0,021048298	0,019555848	0,023584595	0,017658626	0,04501643
86	0,022170588	0,020742198	0,024729831	0,018795056	0,042529971
87	0,023256368	0,02185259	0,025782264	0,019829194	0,039343881
88	0,024255729	0,022812553	0,026752095	0,020783691	0,03553499
89	0,025178115	0,023754054	0,027667633	0,021672941	0,031232853
90	0,026031583	0,024624529	0,028477564	0,022507703	0,026625046
91	0,026823048	0,025431258	0,029256017	0,023219544	0,021942632
92	0,027558473	0,026180531	0,029944015	0,023937095	0,017429793
93	0,02826506	0,026877804	0,030627578	0,024604971	0,013312193
94	0,028883591	0,027527834	0,031250041	0,025228044	0,009756297
95	0,029479349	0,028124852	0,031832785	0,025810519	0,006849716
96	0,030053762	0,02872054	0,032379447	0,026356039	0,004600317
97	0,030546721	0,029235967	0,032893226	0,026867776	0,002951224
98	0,031046126	0,029733116	0,033315916	0,027348506	0,001805725
99	0,031506696	0,03021304	0,033772091	0,027800679	0,001051919
100	0,031940371	0,030615443	0,034189893	0,02822647	0,000582309
101	0,032349328	0,03105247	0,034578402	0,028627823	0,000305641
102	0,032735517	0,031442526	0,034943309	0,028979992	0,000160294
103	0,033100689	0,03181075	0,035286319	0,029379645	7,07E-05
104	0,033385384	0,032158803	0,035608988	0,029706304	2,85E-05
105	0,033713094	0,032488182	0,035912736	0,02999889	1,04E-05
106	0,034024071	0,032800244	0,036198864	0,030325949	3,38E-06
107	0,034307037	0,033096216	0,036468562	0,030620009	9,60E-07

Como se observa en la Tabla 1, el tipo de interés efectivo anual o rentabilidad real de la operación es negativa durante los 10 primeros años de cobro de los términos de la renta (es decir, desde los 65 años, en que el asegurado empieza a cobrar la renta, y hasta los 74 años) en todos los casos salvo en el último analizado, correspondiente al pago de impuestos sobre los rendimientos, en que la rentabilidad es negativa los 11 primeros años (y por tanto hasta los 75 años del asegurado). A partir de ese momento, la rentabilidad pasa a ser positiva y mayor cuantos más términos de la renta percibe el asegurado. El máximo valor de la rentabilidad se produce al término de la operación si el asegurado llega con vida a cumplir los 107 años.

El valor de la rentabilidad esperada, bajo los diferentes escenarios anteriormente enunciados, cuando la prima, pura y comercial, es única, se muestra en la Tabla 2 a continuación:

Tabla 2
Rentabilidad Esperada Renta de Supervivencia Prima Única

PPU	**PCU**	**PCU con β y δ**	**PCU con δ**
0,0109	0,009462813	0,0134738	0,006136643

Resulta evidente que cuando la prima es pura y única, la rentabilidad esperada coincide con el tipo de interés técnico de la operación, esto es, i*=0,0109. Si la prima es comercial y además se considera el pago de impuestos sobre los rendimientos, dicha rentabilidad resulta menor que el tipo de interés técnico de la operación. Finalmente, cuando la renta de supervivencia se contrata a prima comercial y se consideran las características fiscales de la misma, desgravación fiscal y pago de impuestos sobre el capital, la rentabilidad esperada resulta superior, en este ejemplo, al tipo de interés técnico de la operación y por tanto a la rentabilidad esperada obtenida para el resto de los casos analizados porque el porcentaje de deducción es mayor que el pago de impuestos.

Como índices de riesgo calculamos las siguientes dos probabilidades $p[\tilde{\imath} \geq 0]$ y $p[\tilde{\imath} \geq i^{*}]$ que indican, respectivamente, la probabilidad de que el asegurado no tenga pérdidas con la operación y la confianza de dicho asegurado en obtener una rentabilidad real superior a la rentabilidad esperada. La Tabla (3) muestra los diferentes valores de estos índices para la renta de supervivencia contratada a prima pura y a prima comercial únicas, y para los diferentes escenarios impositivos analizados:

Tabla 3
Índices de riesgo de la Renta de Supervivencia a Prima Única

	PPU	PCU	PCU con β y δ	PCU con δ
Primer índice de riesgo	0,71329587	0,685333234	0,71329587	0,685333234
Segundo índice de riesgo	0,58043405	0,537753555	0,49121257	0,58043405

El primer índice de riesgo es el resultado de sumar todas las probabilidades diferidas de fallecimiento desde el momento en que la rentabilidad real deja de ser negativa para pasar a ser positiva, y hasta el final de la operación. El segundo índice de riesgo, que muestra la confianza del asegurado en obtener un tipo de interés real mayor o igual a la rentabilidad esperada, se obtiene sumando las probabilidades diferidas de fallecimiento a partir del pago del término de la renta, en el que el tipo de interés obtenido supera por primera vez al tipo de interés esperado, y hasta el final de la operación. Como se deriva de los resultados obtenidos, cuando la operación se contrata a prima comercial la probabilidad de no tener pérdidas es inferior a la misma probabilidad para el caso de que dicha operación se contrate a prima pura $p[\tilde{\imath}' \geq 0] \leq p[\tilde{\imath} \geq 0]$.

El primer índice de riesgo es el mismo para PPU y PCU con β y δ porque en los dos supuestos el primer término con rentabilidad positiva es el correspondiente al término 11 de la renta, cuando el asegurado tiene 75 años y por tanto se suman los mismos términos para obtenerlos. Esto mismo sucede con el índice de riesgo para PCU y PCU con δ solo que este caso el primer término de la renta con rentabilidad positiva es el 12, cuando el asegurado tiene 76 años.

En cuanto al segundo índice de riesgo, el valor en los casos PPU y PCU con δ coincide porque el primer término en el que la rentabilidad real supera a la rentabilidad esperada es el mismo, en concreto el término 15 de la renta, cuando el asegurado tiene 79 años y por tanto para calcularlos en ambos casos se suman los mismos términos.

Finalmente, en todos los casos, la probabilidad de no tener pérdidas es superior a la probabilidad de que la rentabilidad real sea superior a la rentabilidad esperada de la operación.

5. Conclusiones

La obligatoriedad legal de informar a los asegurados de la rentabilidad esperada que pueden obtener al contratar una determinada operación de seguros de vida persigue la creación un instrumento similar a la TAE en el sector bancario, que permita la comparación entre operaciones actuariales con características similares aumentando de esa forma la transparencia del sector asegurador. Sin embargo, para que esta rentabilidad esperada pueda considerarse un índice homogéneo de la rentabilidad de las operaciones actuariales debería concretarse legalmente la metodología a seguir para calcularla y hacer extensivo su cálculo a todas las operaciones de seguros, especialmente en aquellas en las que media un largo periodo de tiempo entre el momento de la contratación y el momento en el que se produce la prestación (como en los seguros de vida o de invalidez). Adicionalmente, sería conveniente que las autoridades competentes incluyeran en la ley la obligatoriedad de informar acerca de otros índices de riesgo que facilitaran la toma de decisiones por parte de los asegurados informando, por ejemplo, acerca de la confianza de no perder el capital de la prima invertido o de obtener como mínimo la rentabilidad esperada, como los que se proponen en este trabajo.

En cuanto al cálculo de las rentabilidades, es importante destacar como primera conclusión del trabajo, la importancia del análisis estocástico de cualquier operación actuarial y en particular de las rentas de supervivencia sobre una persona. Determinando la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *tanto efectivo de rentabilidad* y de la correspondiente al *valor actual de la función beneficio neto del producto* se obtienen los instrumentos adecuados para llevar a cabo el análisis del riesgo de las mismas. De la distribución de esta última variable aleatoria, se obtiene el *tanto efectivo de rentabilidad esperada*, igualando a cero su valor esperado. Pero este valor esperado, no deja de ser un promedio y su representatividad puede ser muy pequeña cuando se analiza de forma individual la operación para un asegurado, de forma similar a lo que sucede cuando asociamos la renta *per cápita* como renta media de la población, a uno de sus integrantes de forma individual. Como consecuencia de ello, para tomar decisiones sobre una operación actuarial, no es posible utilizar simplemente el *tanto efectivo de rentabilidad esperada*, como sucedía con el tanto efectivo anual equivalente en las operaciones financieras, sino que es necesario añadir información adicional sobre el riesgo de la operación cuantificando la confianza que puede tener el asegurado en alcanzar la rentabilidad esperada así como de obtener una rentabilidad negativa.

En este trabajo, relativo a las rentas de supervivencia, se resuelve el cálculo de la rentabilidad esperada y de ambos coeficientes de riesgo, en las operaciones contratadas a prima única tanto puras como comerciales afectadas por un cierto recargo.

Finalmente se introduce la fiscalidad, con los correspondientes impuestos y bonificaciones en su caso. En concreto, la propuesta realizada para determinar la base imponible del impuesto aplicable a los rendimientos de la operación, determinando la cuantía del rendimiento imputable a cada uno de los términos de la renta de supervivencia, consiste en considerar dicha renta como una suma de capitales diferidos. Así, se descomponen las primas de la operación en las correspondientes a cada uno de sus términos como un capital diferido y aplicamos el impuesto sobre el rendimiento obtenido, restando de la cuantía del correspondiente término de la renta las primas que lo han generado como capital diferido.

Referencias

Alegre Escolano, P. y Sáez Madrid, J. (1991). Sobre la denominada tasa de rentabilidad financiero fiscal. *Revista Española de Financiación y Contabilidad,* 67, 465–487.

Devesa Carpio, J.E., Devesa Carpio, M., Alonso Fernández, J.J., Domínguez Fabián, I., Encinas Goenechea, B. y Meneu Gaya, R. (2013). La rentabilidad actuarial como método de comparación de las operaciones financieras y aseguradoras en Gómez, E., Guillén, M. y Vázquez, F. (Eds.). *Investigaciones en Seguros y Gestión de Riesgos: Riesgo 2013* (pp. 85-98). Madrid: Fundación Mapfre.

Devesa Carpio, J. E., Devesa Carpio, M., Alonso Fernández, J. J., Domínguez Fabián, I., Meneu Gaya, R. y Encinas Goenechea, B. (2016). El reto de las entidades aseguradoras ante la introducción de la rentabilidad esperada en España, *Universia Business Review*, 52, 168-197.

Real Decreto 1060/2015, de 20 de noviembre, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras. *Boletín Oficial del Estado, 2 de diciembre de 2015* (288), 113617-113816.

Gerber, H. (1997) *Insurance Mathematics*. Berlín: Springer.

Moreno Ruiz, R., Trigo Martínez, E., Gómez Pérez-Cacho, O. y Escobar López, R. N. (2017). Rentabilidad esperada en seguros de vida: análisis actuarial de la metodología de cálculo a la luz de la Orden ECC/2329/2014, de 12 de diciembre, *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 4ª época, 23, 102-128.

Navarro Arribas, E. (2019) *Matemáticas de las operaciones financieras*. 1era Edición. Madrid: Pirámide.

Olivieri, A. y Pitacco, E. (2015) *Introduction to Insurance Mathematics*. Switzerland: Springer International Publishing

Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 25 de noviembre de 2009, sobre el seguro de vida, el acceso a la actividad de seguro y de reasaseguro y su ejercicio (Solvencia II)

Pérez-Fructuoso, M.J. y Alegre Escolano, A. (2018). Cálculo de la rentabilidad esperada y cuantificación del riesgo en una operación de ahorro de capital diferido a prima (pura y comercial) única. *Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. Rect@*, 19, 17-34.

Pérez-Fructuoso, M.J. y Alegre Escolano, A. (2019). Cálculo estocástico de la rentabilidad financiero-fiscal de una operación de capital al final del periodo de fallecimiento del asegurado. *Revista Investigación Operacional*, 40 (4), 475-495.